

**Министерство образования и науки Республики Казахстан**  
**Костанайский государственный университет им. А.Байтурсынова**  
**Кафедра электроэнергетики**

**Т.И.Глущенко**

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ 1**

Учебное пособие

**Костанай, 2011**

**УДК 621.3.01**  
**ББК 31.2я73**  
**Г55**

**Автор:**

Глущенко Татьяна Ивановна, кандидат экономических наук

**Рецензенты:**

Курманов Аяп Конлямжаевич, доктор технических наук, профессор,  
зав.кафедрой транспорта и сервиса КИПУ

Утегулов Болатбек Бахытжанович, Заслуженный деятель Республики  
Казахстан, доктор технических наук, профессор кафедры электроэнергетики  
ПГУ

Ткаченко Владимир Васильевич, кандидат технических наук, доцент, зав.  
кафедрой электроэнергетики КГУ

Глущенко Т.И.

Г55 Теоретические основы электротехники 1. - Костанай: КГУ им.

А.Байтурсынова, 2011 – 299 с.

ISBN \_\_\_\_\_

В учебное пособие включены методы расчета цепей постоянного и переменного токов, трехфазных и несинусоидальных цепей. Особое внимание уделено применению специализированных программ к расчету электрических цепей. Работа предоставляет широкий выбор методов расчета и анализа электрических цепей.

Предназначено для студентов электроэнергетических специальностей; оно может быть рекомендовано преподавателям высших учебных заведений при проведении занятий по теоретическим основам электротехники.

УДК 621.3.01  
ББК 31.2я73

Утверждено Учебно-методическим советом Костанайского  
государственного университета им. А. Байтурсынова, протокол от  
\_\_\_\_201\_\_г. № \_\_\_\_.

ISBN \_\_\_\_\_

© Костанайский государственный  
университет им. А.Байтурсынова, 2011 г.

## Содержание

Введение.....	5
1. Линейные электрические цепи постоянного тока .....	7
1.1 Общие теоретические сведения.....	7
1.1.1 Элементы электрических цепей.....	7
1.1.2 Схемы замещения источников электрической энергии...	12
1.1.3 Режимы работы электрической цепи.....	15
1.2 Методы анализа цепей постоянного тока.....	19
1.2.1 Метод эквивалентных преобразований.....	19
1.2.1.1 Общие сведения.....	19
1.2.1.2 Решение типовых задач.....	23
1.2.2 Метод уравнений Кирхгофа.....	33
1.2.3 Метод контурных токов.....	36
1.2.4 Метод узловых потенциалов.....	38
1.2.5 Метод активного двухполюсника.....	40
1.2.6 Потенциальная диаграмма.....	42
1.2.7 Баланс мощностей.....	43
1.2.8 Метод двух узлов.....	44
1.2.9 Метод наложения.....	44
1.2.10 Топология электрической цепи.....	45
1.2.11 Топологические матрицы.....	47
1.2.12 Решение типовых задач.....	54
1.3 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей постоянного тока .....	62
1.3.1 Решение систем уравнений.....	62
1.3.2 Решение типовых задач.....	65
2. Электрические цепи однофазного синусоидального тока. ....	71
2.1 Общие теоретические сведения.....	71
2.1.1 Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов на плоскости декартовых координат.....	73
2.1.2 Векторное изображение синусоидально изменяющихся величин .....	74
2.1.3 Представление синусоидальных ЭДС, напряжений и токов комплексными числами.....	76
2.1.4 Элементы цепи синусоидального тока. Векторные диаграммы и комплексные соотношения для них.....	80
2.1.5 Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС.....	93
2.1.6 Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока.....	94
2.2 Специальные методы расчета .....	97
2.3 Основы матричных методов расчета электрических цепей.....	102
2.4 Преобразование энергии в электрической цепи. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности синусоидального	114

тока.....	
2.5 Резонансы в цепях синусоидального тока .....	124
2.6 Векторные и топографические диаграммы.....	132
2.7 Анализ цепей с индуктивно связанными элементами.....	139
2.8 Особенности составления матричных уравнений при наличии индуктивных связей и ветвей с идеальными источниками.....	148
2.9 Методы расчета, основанные на свойствах линейных цепей....	155
2.10 Метод эквивалентного генератора.....	164
2.11 Решение типовых задач.....	173
2.12 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей переменного тока.....	178
3. Трехфазные цепи.....	187
3.1 Общие теоретические сведения.....	187
3.2 Расчет трехфазных цепей.....	196
3.2.1 Расчет симметричных режимов работы трехфазных систем.....	196
3.2.2 Расчет несимметричных режимов работы трехфазных систем .....	200
3.3 Применение векторных диаграмм для анализа несимметричных режимов.....	205
3.4 Мощность в трехфазных цепях.....	210
3.5 Измерение мощности в трехфазных цепях.....	213
3.6 Метод симметричных составляющих.....	217
3.7 Применение метода симметричных составляющих для симметричных цепей.....	224
3.8 Теорема об активном двухполюснике для симметричных составляющих.....	227
3.9 Вращающееся магнитное поле.....	237
3.10 Решение типовых задач.....	246
3.11 Применение пакета Mathcad к расчету трехфазных электрических цепей переменного тока.....	260
4. Линейные цепи с периодическими несинусоидальными напряжениями и токами.....	263
4.1 Общие теоретические сведения.....	263
4.1.1 Линейные электрические цепи при несинусоидальных периодических токах.....	264
4.1.2 Резонансные явления в цепях несинусоидального тока....	273
4.2 Решение типовых задач.....	283
4.3 Применение пакета Mathcad к расчету цепи с периодическими несинусоидальными напряжениями и токами.....	292
Заключение .....	298
Список использованных источников.....	299

## Введение

«Теоретические основы электротехники 1» являются основной теоретической дисциплиной в системе подготовки специалистов в области электроэнергетики. Она базируется на знаниях, полученных студентами в результате изучения физики, математики и информатики. В свою очередь, хорошее знание ТОЭ 1 значительно облегчает изучение специальных электротехнических дисциплин: электрических машин, информационно-измерительной техники, электроэнергетики и др.

Основная задача дисциплины - дать необходимую теоретическую подготовку по главным вопросам исследования и расчета электрических цепей постоянного и переменного тока, трехфазных и несинусоидальных цепей.

Развитие новых технологий привело к внедрению компьютеров в научные исследования. В настоящее время успешное решение большинства научных задач в значительной степени зависит от умения применить вычислительную технику и соответствующие методы. При обучении современного специалиста необходимо связать математику как общетеоретическую дисциплину с практическим ее применением в работе специалиста и дать конкретный практический аппарат для исследований.

Однако следует помнить, что математическими соотношениями можно описать все что угодно и при этом получить соответствующие результаты, не имеющие никакого реального смысла. По этому поводу Эйнштейн сказал, что понятия, которые оказались полезными в упорядочении вещей, легко приобретают над нами такую власть, что мы забываем об их человеческом происхождении. С этими соображениями связано положение: прежде чем математический аппарат может быть использован для изучения реального и сложного явления, необходимо это явление подвергнуть предварительному анализу, выделив его «главную часть».

Решение практической задачи начинается с описания исходных данных и целей решения – т.е. постановка задачи и построение математической модели. Этот этап является наиболее сложным и ответственным этапом. Если выбранная математическая модель слишком грубо отражает взаимосвязи изучаемого явления, то какие бы методы при этом не применялись, найденные значения окажутся бесполезными и могут привести инженера к ошибкам и нелепым выводам. Математическая модель может иметь вид уравнения, системы уравнений или быть выраженной в форме иных, как угодно сложных, математических структур или соотношений, для решения которых применяются математические методы, возникающие вне математики.

Наиболее важными задачами электроэнергетики являются:

1. анализ электрических цепей с понятием о методах теории графов и элементов топологии;
2. приемы определения вероятностей;

3. способы анализа дифференциальных уравнений, используемых при выяснении устойчивых состояний системы и др.

Математические решения прикладных задач обладают серьезной спецификой. Решения таких задач должны быть не только правильными, но и своевременными, экономными по затрачиваемым усилиям, а результаты должны быть пригодными для практического применения. Для решения многих научно-исследовательских задач разработаны различные программы, применение которых позволяет обеспечить необходимую точность решения задач, заменить трудоемкую работу.

Ранее для решения этих задач требовалось знание языков программирования, с появлением математических пакетов работа пользователя значительно упростилась. Наиболее мощные и распространенные математические пакеты MathCAD и MATLAB соответствуют потребностям, как студента, так и профессионала-аналитика. Задача выбрать из многообразия программ наиболее важные и применить их в учебном процессе.

Одним из достоинств пакета MathCAD является реализация принципа WYSIWYG (What You See Is What You Get, т.е. что видишь, то и получаешь), а также простота в изучении и использовании. В системе применен уникальный метод визуализации данных, суть которого заключается в том, что формулы в документе выглядят так же, как на бумаге. Описываемая система предоставляет пользователю около двухсот операторов и логических функций для численного и символьного решения математических задач различной сложности и математического моделирования.

Поэтому исключительно велика роль систем класса MathCAD в образовании. Облегчая решение сложных математических задач, система снимает психологический барьер при использовании теоретической и прикладной математики, делая обучение интересным и достаточно простым. Грамотное применение систем в учебном процессе обеспечивает повышение фундаментальности математического и специального образования, позволяют готовить электронные уроки с использованием изысканных графиков (в том числе анимационных), визуализировать сложные процессы.

## **1 Линейные электрические цепи постоянного тока**

Основная цель расчета электрической цепи заключается в определении токов в ее ветвях. Зная токи, нетрудно найти напряжения и мощности ветвей и отдельных элементов цепи.

Значения токов, напряжений, мощностей дают возможность оценить условия и эффективность работы электротехнического оборудования и приборов во всех участках электрической цепи.

Связь между ЭДС, напряжениями и токами линейных электрических цепей выражается линейными уравнениями, т.е. уравнениями первой степени, поэтому для их расчета применяются аналитические методы с обычными алгебраическими преобразованиями.

Анализом электрических цепей называют определение токов и ли напряжений в ее ветвях.

Основной задачей этого раздела является овладение методами расчета электрических цепей. К изучению следует приступить после усвоения трех основных законов электрических цепей: закона Ома и двух законов Кирхгофа. Линейные цепи с одним источником проще всего могут быть рассчитаны по закону Ома или методом эквивалентных преобразований. В этом случае при необходимости производят нужные преобразования сопротивлений: параллельного соединения в последовательное и обратно, треугольника в звезду и обратно и т.д.

Разветвленные цепи с несколькими ЭДС рассчитываются при помощи методов, основой которых служат законы Кирхгофа. Методы анализа с применением законов Кирхгофа позволяют рассчитать электрическую цепь любой конфигурации и сложности, т.е. являются основными.

### **1.1 Общие теоретические сведения**

#### **1.1.1 Элементы электрических цепей**

Электромагнитные процессы, протекающие в электротехнических устройствах, как правило, достаточно сложны. Однако во многих случаях, их основные характеристики можно описать с помощью таких интегральных понятий, как: напряжение, ток, электродвижущая сила (ЭДС). При таком подходе совокупность электротехнических устройств, состоящую из соответствующим образом соединенных источников и приемников электрической энергии, предназначенных для генерации, передачи, распределения и преобразования электрической энергии и (или) информации, рассматривают как электрическую цепь. Электрическая цепь состоит из отдельных частей (объектов), выполняющих определенные функции и называемых элементами цепи. Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии (сигналов). Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию, называются генераторами или источниками электрической энергии, а

устройства, потребляющие ее – приемниками (потребителями) электрической энергии.

У каждого элемента цепи можно выделить определенное число зажимов (полюсов), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают двух – и многополюсные элементы. Двухполюсники имеют два зажима. К ним относятся источники энергии (за исключением управляемых и многофазных), резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы. Многополюсные элементы – это, например, триоды, трансформаторы, усилители и т.д.

Все элементы электрической цепи условно можно разделить на активные и пассивные. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия. К основным характеристикам элементов цепи относятся их вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики, описываемые дифференциальными или (и) алгебраическими уравнениями. Если элементы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями, то они называются линейными, в противном случае они относятся к классу нелинейных. Строго говоря, все элементы являются нелинейными. Возможность рассмотрения их как линейных, что существенно упрощает математическое описание и анализ процессов, определяется границами изменения характеризующих их переменных и их частот. Коэффициенты, связывающие переменные, их производные и интегралы в этих уравнениях, называются параметрами элемента.

Если параметры элемента не являются функциями пространственных координат, определяющих его геометрические размеры, то он называется элементом с сосредоточенными параметрами. Если элемент описывается уравнениями, в которые входят пространственные переменные, то он относится к классу элементов с распределенными параметрами. Классическим примером последних является линия передачи электроэнергии (длинная линия).

Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Наличие в схеме хотя бы одного нелинейного элемента относит ее к классу нелинейных.

Рассмотрим пассивные элементы цепи, их основные характеристики и параметры.

### *1. Резистивный элемент (резистор)*

Условное графическое изображение резистора приведено на рисунке 1,а. Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением. Последнее определяется геометрическими размерами тела и свойствами материала: удельным сопротивлением  $\rho$  (Ом·м) или обратной величиной – удельной проводимостью  $\gamma = \rho^{-1}$  (См/м).



В простейшем случае проводника длиной  $\ell$  и сечением  $S$  его сопротивление определяется выражением

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma S} (\text{Ом}) \quad (1.1)$$

где  $\rho$  - удельное сопротивление, Ом·м;

$\ell$  - длина проводника, м;

$S$  - сечение проводника, м<sup>2</sup>.

В общем случае определение сопротивления связано с расчетом поля в проводящей среде, разделяющей два электрода.

Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость  $u(i)$  (или  $i(u)$ ), называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость  $u(i)$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рисунок 1,б), то резистор называется линейным и описывается соотношением:

$$u = Ri = m_{Ritg} \alpha \quad (1.2)$$

или

$$i = gu \quad (1.3)$$

где  $g = R^{-1}$  - проводимость.

При этом  $R = \text{const}$ .

Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейна (рисунок 1,б), характеризуется несколькими параметрами. В частности

безынерционному резистору ставятся в соответствие статическое  $R_{ст} = \frac{U}{I}$  и

дифференциальное  $R_d = \left. \frac{du}{di} \right|_I$  сопротивление.

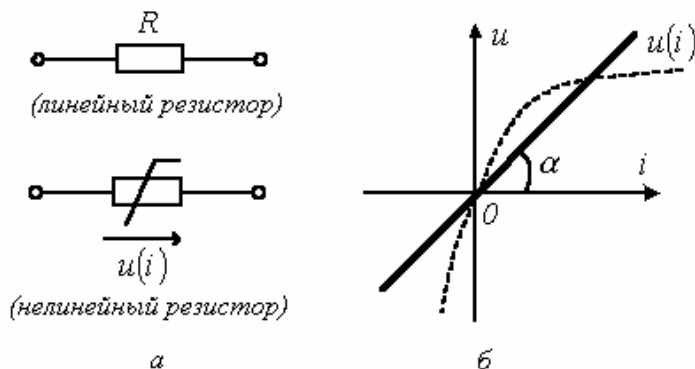


Рисунок 1- Резистивные элементы и их характеристики

## 2. Индуктивный элемент (катушка индуктивности)

Условное графическое изображение катушки индуктивности приведено на рисунке 2,а. Катушка – это пассивный элемент, характеризующийся индуктивностью. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушке:

$$L = \frac{\Psi}{i} \text{ (Гн)} \quad (1.4)$$

где  $\Psi$  – потокосцепление;

$i$  – ток в катушке.

В свою очередь потокосцепление равно сумме произведений потока, пронизывающего витки, на число этих витков

$$\Psi = \sum w_k \Phi_k,$$

где  $\Phi_k = \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S}$ .

Основной характеристикой катушки индуктивности является зависимость  $\Psi(i)$ , называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость  $\Psi(i)$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рисунке 2,б); при этом  $L = m \cdot l \cdot g \cdot \alpha = \text{const}$ .

Нелинейные свойства катушки индуктивности (см. кривую  $\Psi(i)$  на рисунке 2,б) определяет наличие у нее сердечника из ферромагнитного материала, для которого зависимость  $B(H) = \mu_0 \mu H$  магнитной индукции от напряженности поля нелинейна. Без учета явления магнитного гистерезиса

нелинейная катушка характеризуется статической  $L_{ст} = \frac{\Psi}{I}$  и

дифференциальной  $L_d = \left. \frac{d\Psi}{di} \right|_I$  индуктивностями.

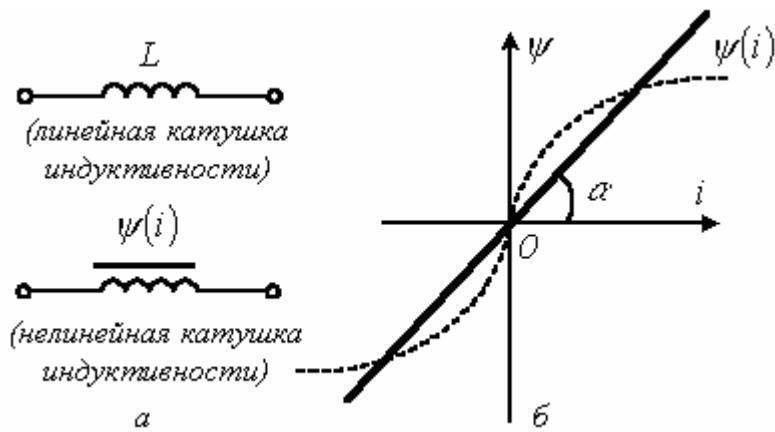


Рисунок 2 - Индуктивные элементы и их характеристики

### 3. Емкостный элемент (конденсатор)

Условное графическое изображение конденсатора приведено на рисунке 3,а.

Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Для расчета последней необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Емкость определяется отношением заряда  $q$  на обкладках конденсатора к напряжению  $u$  между ними

$$C = \frac{q}{u} (\Phi) \quad (1.5)$$

где  $q$  - заряд;

$u$  – напряжение.

Она зависит от геометрии обкладок и свойств диэлектрика, находящегося между ними. Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = \text{const}$ . В этом случае зависимость  $q(u)$  представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, (см. рисунок 3,б) и  $C = m \text{ tg } \alpha = \text{const}$ .

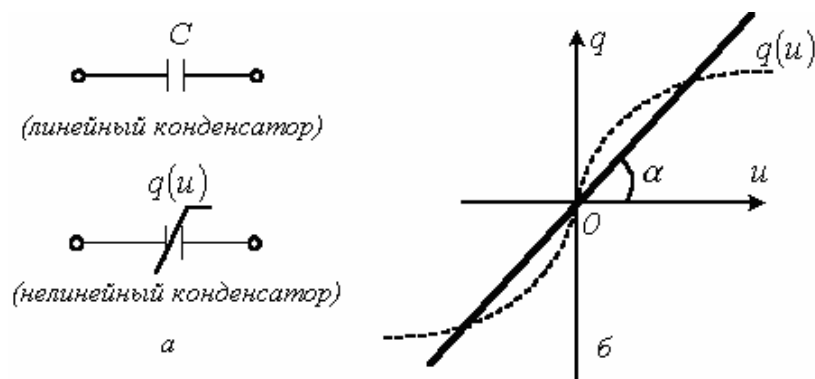


Рисунок 3 - Емкостные элементы и их характеристики

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обуславливает нелинейность зависимости  $q(u)$  (рис. 3,б). В этом случае без учета явления электрического гистерезиса нелинейный конденсатор характеризуется

статической  $C_{ст} = \frac{q}{U}$  и дифференциальной  $C_d = \left. \frac{dq}{du} \right|_U$  емкостями.

### 1.1.2 Схемы замещения источников электрической энергии

Свойства источника электрической энергии описываются ВАХ  $U(I)$ , называемой внешней характеристикой источника. Далее в этом разделе для упрощения анализа и математического описания будут рассматриваться источники постоянного напряжения (тока). Однако все полученные при этом закономерности, понятия и эквивалентные схемы в полной мере распространяются на источники переменного тока. ВАХ источника может быть определена экспериментально на основе схемы, представленной на рисунке 4,а. Здесь вольтметр  $V$  измеряет напряжение на зажимах 1-2 источника  $I$ , а амперметр  $A$  – потребляемый от него ток  $I$ , величина которого может изменяться с помощью переменного нагрузочного резистора (реостата)  $R_H$ .

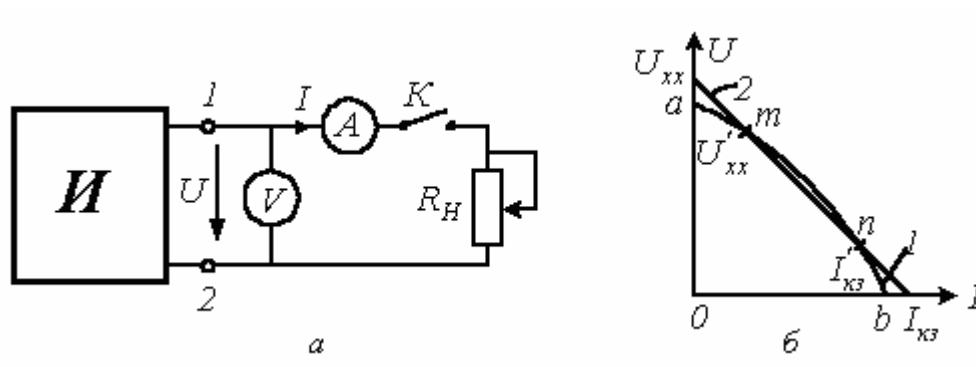


Рисунок 4 - Источник электрической энергии (ЭДС) и их характеристики

В общем случае ВАХ источника является нелинейной (кривая 1 на рисунок 4,б). Она имеет две характерные точки, которые соответствуют:

а – режиму холостого хода  $(I = 0; U = U'_{xx})$ ;

б – режиму короткого замыкания  $(U = 0; I = I'_{кз})$ .

Для большинства источников режим короткого замыкания (иногда холостого хода) является недопустимым. Токи и напряжения источника обычно могут изменяться в определенных пределах, ограниченных сверху значениями, соответствующими номинальному режиму (режиму, при

котором изготовитель гарантирует наилучшие условия его эксплуатации в отношении экономичности и долговечности срока службы). Это позволяет в ряде случаев для упрощения расчетов аппроксимировать нелинейную ВАХ на рабочем участке *m-n* (см. рисунок 4,б) прямой, положение которой определяется рабочими интервалами изменения напряжения и тока. Следует отметить, что многие источники (гальванические элементы, аккумуляторы) имеют линейные ВАХ.

Прямая 2 на рисунке 4,б описывается линейным уравнением

$$U = U_{xx} - R_{\text{вн}} I, \quad (1.5)$$

где  $U_{xx}$  - напряжение на зажимах источника при отключенной нагрузке (разомкнутом ключе К в схеме на рисунке 4,а);

$R_{\text{вн}} = U_{xx} / I_{\text{кз}}$  - внутреннее сопротивление источника.

Уравнение (1.5) позволяет составить последовательную схему замещения источника (см. рисунок 5,а). На этой схеме символом  $E$  обозначен элемент, называемый идеальным источником ЭДС. Напряжение на зажимах этого элемента  $U_{xx} = E = \text{const}$  не зависит от тока источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рисунке 5,б. На основании (1.5) у такого источника  $R_{\text{вн}} = 0$ . Отметим, что направления ЭДС и напряжения на зажимах источника противоположны.

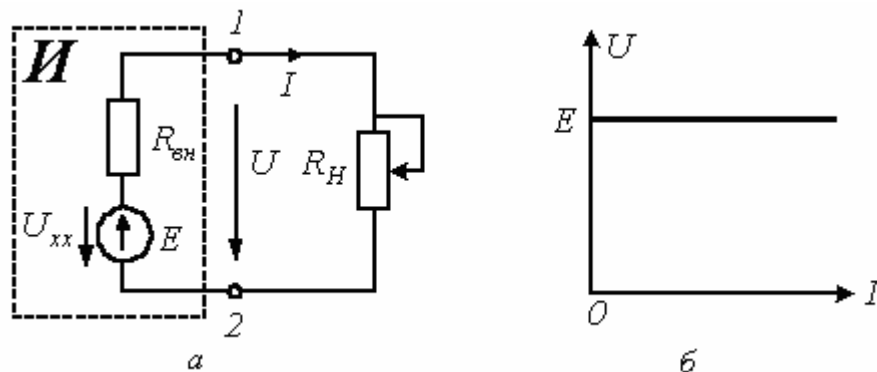


Рисунок 5 - Идеальный источник электрической энергии (ЭДС) и его характеристика

Если ВАХ источника линейна, то для определения параметров его схемы замещения необходимо провести замеры напряжения и тока для двух любых режимов его работы.

Существует также параллельная схема замещения источника. Для ее описания разделим левую и правую части соотношения (1.5) на  $R_{\text{вн}}$ . В результате получим

$$I = \frac{U_{xx}}{R_{en}} - \frac{U}{R_{en}} = I_{кз} - \frac{U}{R_{en}}$$

или

$$I = J - g_{en} U, \quad (1.6)$$

где  $J = I_{кз}$ ;  $g_{en} = R_{en}^{-1}$  - внутренняя проводимость источника.

Уравнению (1.6) соответствует схема замещения источника на рисунке 6,а.

На этой схеме символом  $J$  обозначен элемент, называемый идеальным источником тока. Ток в ветви с этим элементом равен  $J = I_{кз}$  и не зависит от напряжения на зажимах источника, следовательно, ему соответствует ВАХ на рисунке 6,б. На этом основании с учетом (1.6) у такого источника  $g_{en} = 0$ , т.е. его внутреннее сопротивление  $R_{en} = \infty$ .

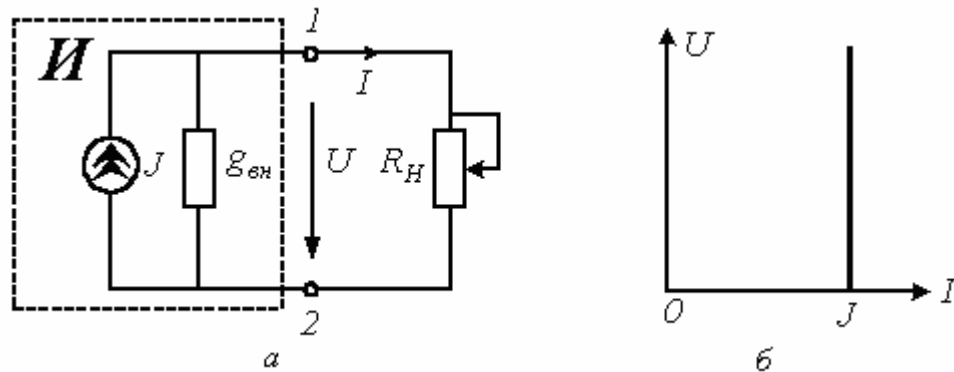


Рисунок 6 - Параллельная схема замещения источника энергии и его характеристика

Отметим, что в расчетном плане при выполнении условия  $E = JR_{en}$  последовательная и параллельная схемы замещения источника являются эквивалентными. Однако в энергетическом отношении они различны, поскольку в режиме холостого хода для последовательной схемы замещения мощность равна нулю, а для параллельной – нет.

Кроме отмеченных режимов функционирования источника, на практике важное значение имеет согласованный режим работы, при котором нагрузкой  $R_H$  от источника потребляется максимальная мощность

$$P_{max} = \frac{U_{xx}^2}{4R_{en}}, \quad (1.7)$$

Условие такого режима

$$R_{\Sigma} = R_{\Sigma\pi}, \quad (1.8)$$

В заключение отметим, что в соответствии с ВАХ на рисунках 5,б и 6,б идеальные источники ЭДС и тока являются источниками бесконечно большой мощности.

### 1.1.3 Режимы работы электрической цепи

Режим работы электрической цепи, т.е. ее электрическое состояние, определяется значениями токов, напряжений и мощностей ее отдельных элементов.

В электрических цепях различают номинальный, рабочий режимы и режимы холостого хода и короткого замыкания.

**Номинальный режим.** Источники и приемники электрической энергии, провода, а также вспомогательные аппараты и приборы характеризуются номинальными величинами тока, напряжения и мощности и т.д., на которые эти устройства рассчитаны заводами-изготовителями для нормальной работы. Номинальные величины обычно указываются в паспорте устройства.

Режим работы, при котором действительные токи, напряжения, мощности элементов электрической цепи соответствуют их номинальным величинам, называются **номинальным** (нормальным).

Отклонение от номинального режима нежелательно, а превышение номинальных величин в большинстве случаев недопустимо, так как при этом не могут быть гарантированы расчетные продолжительность и экономичность работы электрических устройств и установок.

Для обеспечения нормальных условий работы приемников электрической энергии необходимо соблюдать соответствие напряжений: действительное напряжение на зажимах устройства должно быть равно его номинальному напряжению.

**Рабочий режим.** Режимы электрической цепи по различным причинам могут отличаться от номинального.

Если в электрической цепи действительные характеристики режима отличаются от номинальных величин ее элементов, но отклонения находятся в допустимых пределах, то режим называется рабочим. На рисунке 7 сопротивление соединительных проводов отнесено к приемнику.

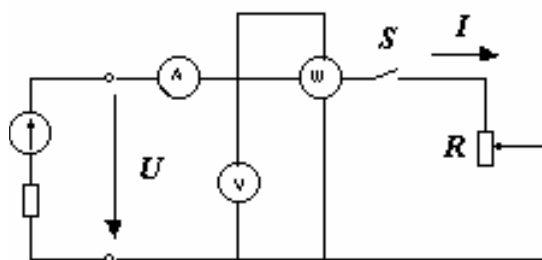


Рисунок 7 – Измерительная схема

Применяя к этой цепи закон сохранения энергии, можно составить уравнение энергетического баланса за некоторое время:

$$W_u - W_o = W_n \quad (1.9)$$

где  $W_u = EIt$  – энергия источника;

$W_n = I^2 R t$  – энергия приемника;

$W_o = I^2 r t$  – энергия потерь в источнике.

В этом случае энергетический баланс имеет вид

$$EIt = I^2 r t + I^2 R t \quad (1.10)$$

После сокращения на  $t$  получим уравнение баланса мощностей

$$EI = I^2 r + I^2 R \quad (1.11)$$

Далее, сокращая на  $I$ , получаем уравнение баланса напряжений

$$EI = Ir + IR \quad \text{или} \quad E = U_o + U \quad (1.12)$$

где  $U_o$  – внутреннее падение напряжения в источнике;

$U$  – напряжение на внешних зажимах источника.

Ток в цепи

$$I = E / (r + R) \quad (1.13)$$

Эта формула является выражением закона Ома для простейшей цепи.

Напряжение  $U$  на внешних зажимах источника, равное в этом случае напряжению на приемнике, меньше ЭДС источника на величину внутреннего падения напряжения  $Ir$ :

$$U = IR = E - Ir \quad (1.14)$$

Отношение мощности  $P_n$  приемника к мощности  $P_{\text{и}}$  источника называется *коэффициентом полезного действия источника*:



$$\eta = P_{II} / P_{II} \quad (1.15)$$

КПД источника можно определить отношением напряжения на зажимах источника к его ЭДС:

$$\eta = P_{II} / P_{II} = UI/EI = U/E \quad (1.16)$$

При равенстве сопротивления нагрузки внутреннему сопротивлению источника (**режим согласованной нагрузки**), на потребителе выделяется максимальная мощность, однако, при максимальной отдаче КПД цепи  $\eta = 50\%$ .

**Режимы холостого хода и короткого замыкания.** При  $R = \infty$  тока в цепи не будет. Этот случай соответствует размыканию цепи. Режим электрической цепи или отдельных источников, при котором ток в них равен нулю, называется **режимом холостого хода**. При холостом ходе напряжение на внешних зажимах источника равно его ЭДС

$$U = E \quad (1.17)$$

При  $R = 0$ , согласно выражению  $I = E/r = I_k$ , а напряжение на зажимах приемника и источника  $U = 0$ .

Режим электрической цепи, при котором накоротко замкнут участок с одним или несколькими элементами, в связи, с чем напряжение на этом участке равно нулю, называется **режимом короткого замыкания**. Соответственно ток  $I_k$  в цепи называется током короткого замыкания.

Короткое замыкание в электрических установках нежелательно, так как токи короткого замыкания, как правило, в несколько раз превышают номинальные величины, что ведет к резкому увеличению выделения теплоты в токоведущих частях и, следовательно, к порче электрических установок.

Напряжение на зажимах источника уменьшается от  $U = E$  до  $U = 0$ , если ток нагрузки увеличивается от нуля до тока короткого замыкания  $I_k$ .

Энергетические процессы в цепях переменного тока зависят от наличия реактивных сопротивлений: катушек индуктивности, конденсаторов и характеризуются активной мощностью  $P = UI \cos \varphi$  и реактивной мощностью  $Q = UI \sin \varphi$ . Часть электрической энергии, подводимой от генератора преобразуется в другие виды энергии, а часть энергии затрачивается на создание магнитного (в катушках индуктивности) или электрического поля (в конденсаторах).

Если реактивная мощность электрической цепи не равна нулю, то  $\cos \varphi < 1$ . В электрической цепи переменного тока, в которой имеются катушка индуктивности и конденсатор, включенные последовательно или параллельно, общая реактивная мощность всегда меньше, чем реактивная мощность каждого элемента. В этом случае говорят о компенсации реактивной мощности катушки реактивной мощностью конденсатора, т.к.  $Q_L$

и  $Q_C$  имеют противоположные знаки. Полная компенсация реактивной мощности возможна при резонансе.

Компенсация реактивной мощности в электрических цепях имеет большое технико-экономическое значение. Ток в приемнике, а следовательно, и в проводах, соединяющих его с источником энергии, при этих условиях зависит от величины реактивной мощности  $Q$ :

$$I = \frac{S}{U} = \frac{\sqrt{P^2 + (Q_L - Q_C)^2}}{U} \quad (1.18)$$

Чем больше реактивная мощность приемника, тем больший ток должен быть в самом приемнике, в генераторе, соединительных проводах, трансформаторе и других элементах сети электроснабжения.

Мощность тепловых потерь, согласно закону Джоуля-Ленца, пропорциональна квадрату тока и сопротивлению проводов:

$$\Delta P = I^2 R \quad (1.19)$$

Очевидно, что чем больше ток приемника, тем больше потери энергии во всех элементах электрической цепи. Наиболее полное использование генераторов и трансформаторов соответствует режиму работы с номинальным током при номинальном напряжении.

Реактивную мощность установок, потребляющих электрическую энергию необходимо сокращать. На практике это достигается путем правильного выбора мощности электродвигателей, трансформаторов, рациональной эксплуатации их без недогрузки и работы вхолостую, а также компенсацией с помощью конденсаторов. Для этого параллельно к приемникам подключают конденсаторные батареи.

### Контрольные вопросы

1. Какие схемы замещения источников энергии существуют?
2. Какой источник энергии называют идеальным?
3. Может ли внешняя характеристик источника проходить через начало координат?
4. Какой режим (холостой ход или короткое замыкание) является аварийным для источника тока?
5. В чем заключаются эквивалентность и различие последовательной и параллельной схем замещения источника?

## 1.2 Методы анализа цепей постоянного тока

### 1.2.1 Метод эквивалентных преобразований

#### 1.2.1.1 Общие сведения

Рассматривая цепи с одним источником энергии и пассивными (не имеющим ЭДС) приемниками, нужно уяснить принципиальное различие между последовательным и параллельным способами соединения элементов. При последовательном соединении по всей замкнутой цепи циркулирует один и тот же ток. Напряжение источника делится между приемниками прямо пропорционально их сопротивлениям. Общее сопротивление внешней цепи равно сумме сопротивлений всех приемников.

При параллельном соединении приемники находятся под одинаковым напряжением. Ток источника делится между приемниками прямо пропорционально их проводимостям (обратно пропорционально сопротивлениям).

Метод эквивалентных преобразований основан на замене двухполюсника одного вида на двухполюсник другого вида.

Двухполюсники на рисунке 8 будут эквивалентными, если

$$R_{\text{эк}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (1.20)$$

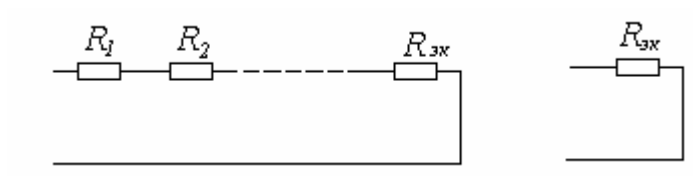


Рисунок 8 - Эквивалентное преобразование последовательного соединения сопротивлений

Эквивалентные преобразования двухполюсников на рисунке 9 определяет отношение

$$\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.21)$$

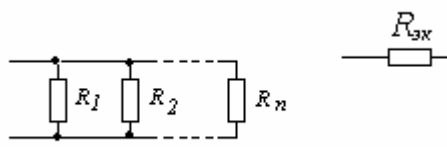


Рисунок 9 - Эквивалентное преобразование параллельного соединения сопротивлений

В случае  $n=2$   $\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ , откуда  $R_{\text{эк}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$ .

Если  $n=3$   $\frac{1}{R_{\text{эк}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ , откуда  $R_{\text{эк}} = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1}$ .

Схему сложной цепи, состоящую из последовательно и параллельно соединенных ветвей, можно преобразовать в простейшую схему с одним приемником и по ней рассчитать общий ток цепи, поступающий от источника энергии. Затем, возвращаясь постепенно к исходной схеме, можно рассчитать напряжения и токи во всех элементах цепи.

При расчетах электрических цепей необходимо учитывать, что реальный источник электрической энергии обладает не только ЭДС, но и внутренним сопротивлением. ЭДС источника компенсирует падение напряжения как на внешнем сопротивлении  $R$ , которым обладает приемник, так и на внутреннем сопротивлении  $r$ .

$$E = I \cdot R + I \cdot r,$$

откуда  $I = \frac{E}{R + r}$ .

Так как напряжение  $U = I \cdot R$ , то  $U = E - I \cdot r$ .

Параметры  $E$  и  $r$  указываются на эквивалентной схеме источника энергии рисунок 10:

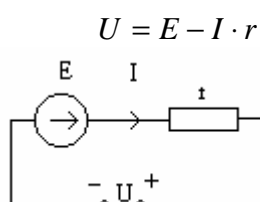


Рисунок 10 – Схема замещения источника ЭДС

Такой же эквивалентной схемой отображают активный приемник энергии (заряжающийся аккумулятор, электродвигатель) рисунок 11. В отличие от источника у активного приемника ЭДС меньше приложенного напряжения, а потребляемый ток направлен навстречу ЭДС:

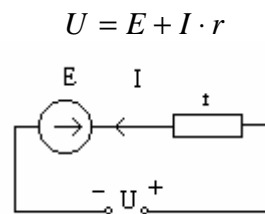


Рисунок 11 – Схема замещения активного приемника

При решении задач часто используется преобразование треугольник-звезда (рисунок 12).

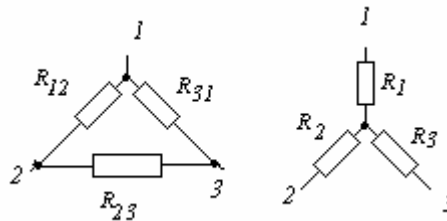


Рис. 12 Эквивалентное преобразование треугольника в звезду и звезды в треугольник

Формулы эквивалентных преобразований имеют вид:  
Сопротивления лучей звезды

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Сопротивления треугольника

$$\begin{aligned} g_{12} &= \frac{g_1 \cdot g_2}{g_1 + g_2 + g_3} \\ g_{23} &= \frac{g_2 \cdot g_3}{g_1 + g_2 + g_3} \\ g_{31} &= \frac{g_3 \cdot g_1}{g_1 + g_2 + g_3} \end{aligned} \quad (1.23)$$

где,  $g_{12}$ ,  $g_{23}$ ,  $g_{31}$  - проводимости сторон треугольника.

Двухполюсники, в которых есть источники ЭДС и (или) тока, называются активными (рисунок 13).

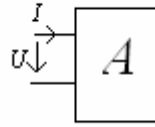


Рисунок 13 - Активный двухполюсник

Двухполюсники на рисунке 14 эквивалентны, если имеют одинаковые внешние характеристики  $U(I)$ .

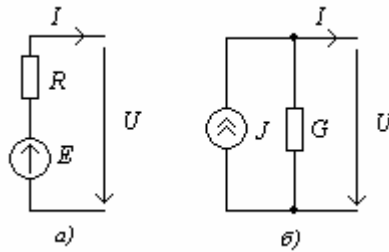


Рисунок 14 - Эквивалентные двухполюсники

Для двухполюсника по схеме рисунка 14 а имеем

$$U = E - RI \quad (1.24)$$

Внешняя характеристика двухполюсника по схеме рисунка 14 б определяется из уравнения

$$-J + I + GU = 0 \quad (1.25)$$

откуда

$$U = \frac{J}{G} - \frac{1}{G}I \quad (1.26)$$

Двухполюсники эквивалентны, если

$$E = \frac{J}{G}; R = \frac{1}{G} \quad (1.27)$$

Для расчета сложных цепей, имеющих узловые точки, замкнутые контуры и несколько ЭДС, применяют законы Кирхгофа. Согласно первому закону Кирхгофа, сумма токов, подходящих к узловой точке, равна сумме отходящих токов; согласно второму закону, алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме падений напряжений.

### 1.2.1.2 Решение типовых задач

#### Задача 1.1

Преобразуя схему (рисунок 15), рассчитать напряжение и токи во всех участках цепи.  $R_1=2\text{ Ом}$ ,  $R_2=6\text{ Ом}$ ,  $R_3=8\text{ Ом}$ ,  $R_4=4\text{ Ом}$ ,  $U=36\text{ В}$ .

#### Решение

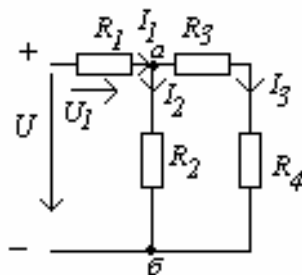


Рисунок 15 – Расчетная схема

Упрощение схемы (рисунок 16) с применением эквивалентных преобразований:

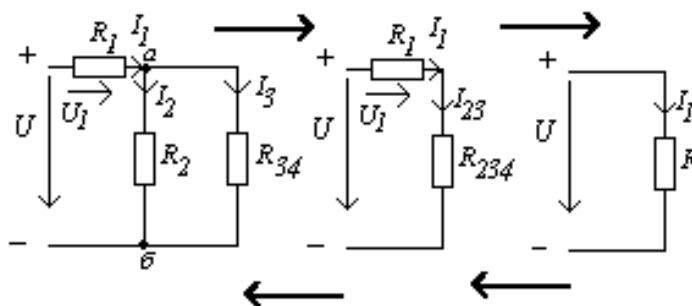


Рисунок 16 – Упрощенные схемы

Расчет схемы:

## Расчет эквивалентных сопротивлений

$$R_{3,4} = R_3 + R_4 = 8 + 4 = 12 \text{ Ом}$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{3,4}},$$

$$R_{AB} = \frac{R_2 \cdot R_{3,4}}{R_2 + R_{3,4}} = \frac{6 \cdot 12}{6 + 12} = 4 \text{ Ом}$$

$$R = R_1 + R_{AB} = 2 + 4 = 6 \text{ Ом}$$

## Расчет токов и напряжений

$$I_1 = \frac{U}{R} = \frac{36}{6} = 6 \text{ А}$$

$$U_{AB} = I_1 \cdot R_{AB} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В}$$

$$I_{3,4} = \frac{U_{AB}}{R_{3,4}} = \frac{12}{12} = 1 \text{ А}$$

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = \frac{12}{6} = 2 \text{ А}$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 6 \cdot 2 = 12 \text{ В}$$

$$U_3 = I_{3,4} R_3 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ В}$$

$$U_4 = I_{3,4} R_4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ В}$$

### Задача 1.2

Рассчитать и построить внешнюю характеристику источника энергии имеющего:  $E = 100 \text{ В}$  и  $r = 2 \text{ Ом}$ .

### Решение

$$U = E - I \cdot r$$

1. Пусть  $I = 0$ , тогда  $U = E = 100 \text{ В}$ .

2. Пусть  $U = 0$  (короткое замыкание), тогда

$$I = I_k = \frac{E}{r} = \frac{100}{2} = 50 \text{ А}$$

3. По полученным координатам наносим точки и строим внешнюю характеристику рисунок 17.

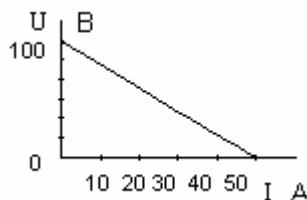


Рисунок 17 - Внешняя характеристика источника энергии

### Задача 1.3

Найти токи в ветвях и напряжение  $U_{ab}$  в цепи по схеме рисунка 18.



Напряжение  $U=75$  В. Параметры цепи:  $R_1=50$  Ом;  $R_{21}=20$  Ом;  $R_{22}=30$  Ом;  $R_{31}=30$  Ом;  $R_{32}=20$  Ом.

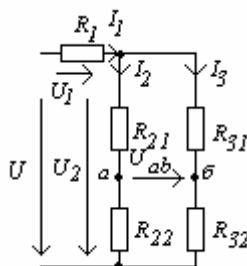


Рисунок 18- Расчетная схема

## Решение

Определяем положительные направления токов ветвей (рисунок 18).

В ветвях с токами  $I_2$  и  $I_3$  резисторы  $R_{21}$ ,  $R_{22}$  и  $R_{31}$ ,  $R_{32}$  соединены последовательно.

Следовательно,

$$R_2=R_{21}+R_{22}=50 \text{ Ом};$$

$$R_3 = R_{31} + R_{32} = 50 \text{ Ом.}$$

Участки  $R_2$ ,  $R_3$  соединены параллельно, поэтому

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 25 \text{ OM.}$$

Электрическую цепь, состоящую из двух последовательно соединенных резисторов, называют делителем напряжения.

Рассчитываем делитель напряжения  $R_1, R_{23}$ .

Токи и напряжения делителя определяются по выражениям:

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{23}} = \frac{75}{50 + 25} = 1 \text{ A};$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 1 \cdot 50 = 50 \text{ B};$$

$$U_2 = I_1 R_{23} = 1 \cdot 25 = 25 \text{ В};$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{25}{50} = 0,5 \text{ A.}$$

Напряжение  $U_{ab}$  находим по второму закону Кирхгофа

$$U_{ab} = I_2 R_{22} - I_3 R_{32}.$$

Получаем

$$U_{ab} = 0,5 \cdot 30 - 0,5 \cdot 20 = 50 \text{ В.}$$

### Задача 1.4

Найти ток в ветви *a-b* цепи по схеме рисунка 19. Параметры цепи:  $R_1=47$  Ом;  $R_2=75$  Ом;  $R_3=33$  Ом;  $R_4=25$  Ом;  $R_5=40$  Ом. Напряжение  $U=100$  В.

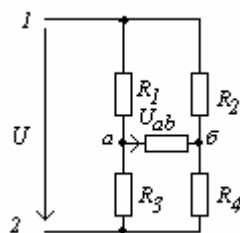


Рисунок 19 – Расчетная схема

### Решение

Определяем положительное направление тока  $I$  ветви *a-b*. Преобразуем треугольник из резисторов  $R_3$ ,  $R_4$ ,  $R_5$  в звезду  $R_{35}$ ,  $R_{45}$ ,  $R_{34}$ . По формулам эквивалентных преобразований имеем:

$$R_{34} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{33 \cdot 25}{33 + 25 + 40} = 8,42 \text{ Ом}$$

$$R_{45} = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{25 \cdot 40}{33 + 25 + 40} = 10,2 \text{ Ом}$$

$$R_{35} = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{33 \cdot 40}{33 + 25 + 40} = 13,47 \text{ Ом}$$

Получаем схему замещения (рисунок 20).

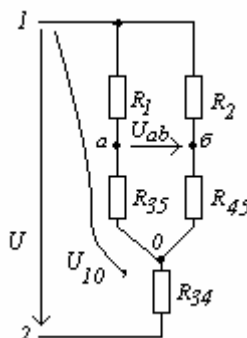


Рисунок 20- Схема замещения

Определяем эквивалентные сопротивления последовательно и параллельно соединенных участков:

$$\begin{aligned} R_{135} &= R_1 + R_{35} = 60,47 \text{ Ом}; \\ R_{245} &= R_2 + R_{45} = 85,2 \text{ Ом}; \\ R_{10} &= \frac{R_{135} R_{245}}{R_{135} + R_{245}} = \frac{60,47 \cdot 85,2}{60,47 + 85,2} = 35,7 \text{ Ом}. \end{aligned}$$

Рассчитываем делитель напряжения  $R_{10}$ ,  $R_{34}$ . Напряжение

$$U_{10} = \frac{U \cdot R_{10}}{R_{10} + R_{34}} = \frac{100 \cdot 35,7}{35,7 + 8,42} = 80,92 \text{ В}.$$

Рассчитываем делители  $R_1 - R_{35}$ ;  $R_2 - R_{45}$  и определяем

$$U_{ab} = U_{10} \left( \frac{R_{35}}{R_{135}} - \frac{R_{45}}{R_{245}} \right) = 8,32 \text{ В}$$

Ток в ветви а -b находим по закону Ома:

$$I = \frac{U_{ab}}{R_5} = \frac{8,32}{40} = 0,208 \text{ А}.$$

### Задача 1. 5

Выполнить эквивалентные преобразования для двухполюсника (схема на рисунке 21). Параметры резисторов двухполюсника:  $R_1 = 75 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 50 \text{ Ом}$ . Источники:  $E_1 = 30 \text{ В}$ ;  $J_1 = 1 \text{ А}$ .

### Решение

Этапы выполнения преобразований поясняет рисунок 22.

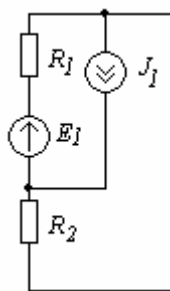


Рисунок 21- Расчетная схема

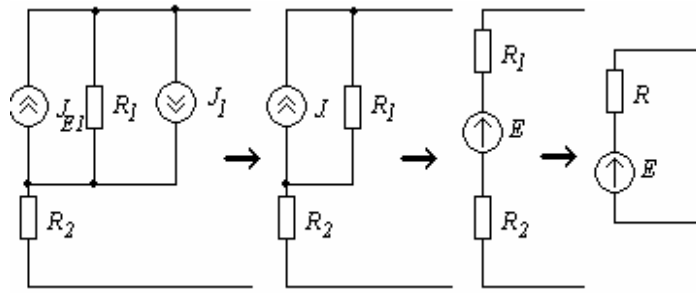


Рисунок 22 – Преобразование схемы

Расчет выполняется по формулам эквивалентных преобразований:

$$J_{E1} = E_1 / R_1 = 30 / 75 = 0,4 \text{ A};$$

$$J = J_{E1} - J_1 = -0,6 \text{ A};$$

$$E = JR_1 = -0,6 \cdot 75 = -45 \text{ B};$$

$$R = R_1 + R_2 = 125 \text{ Ом}.$$

### Задача 1.6

Методом эквивалентных преобразований рассчитать токи ветвей в цепи со схемой (рисунок 23). Параметры резисторов ветвей:  $R_1 = 100 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 130 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 43 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 75 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 110 \text{ Ом}$ ;  $R_7 = 200 \text{ Ом}$ ;  $R_8 = 45 \text{ Ом}$ . Источники:  $E_1 = 15 \text{ B}$ ;  $E_5 = 24 \text{ B}$ ;  $E_7 = 8 \text{ B}$ ;  $J_6 = 0,2 \text{ A}$ ;  $J_7 = 0,1 \text{ A}$ .

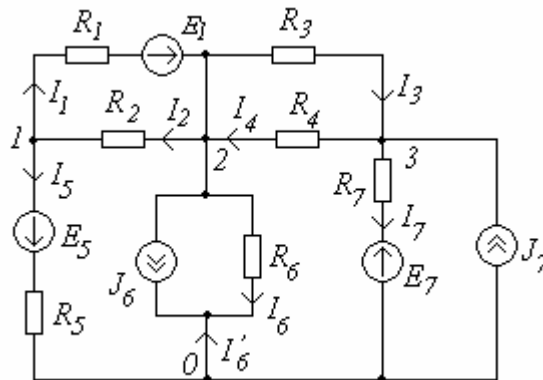


Рисунок 23 – Расчетная схема

### Решение

Назначаем положительные направления токов в ветвях. Узлы схемы отмечаем цифрами 1, 2, 3 и 0.

Выполняем эквивалентные преобразования для двухполюсника между узлами 1-2 (рисунок 24).

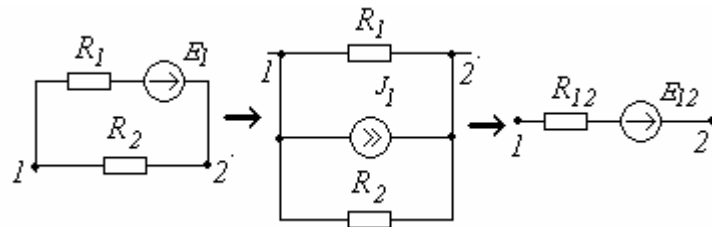


Рисунок 24 Схема преобразования двухполюсника между узлами 1-2

Находим:

$$J_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{15}{100} = 0,15 \text{ A};$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 130}{100 + 130} = 56,52 \text{ Ом};$$

$$E_{12} = J_1 R_{12} = 0,15 \cdot 56,52 = 8,48 \text{ В}.$$

Между узлами 2-3 резисторы соединены параллельно, поэтому

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{43 \cdot 75}{43 + 75} = 27,33 \text{ Ом}.$$

Получаем схему (рисунок 25):

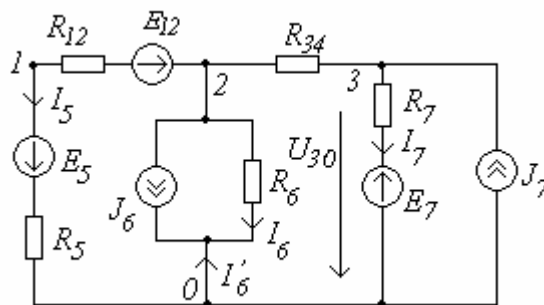


Рисунок 25 – Схема после преобразования двухполюсника 1-2

Преобразование для двухполюсника между узлами 3-0 поясняет рисунок 26:

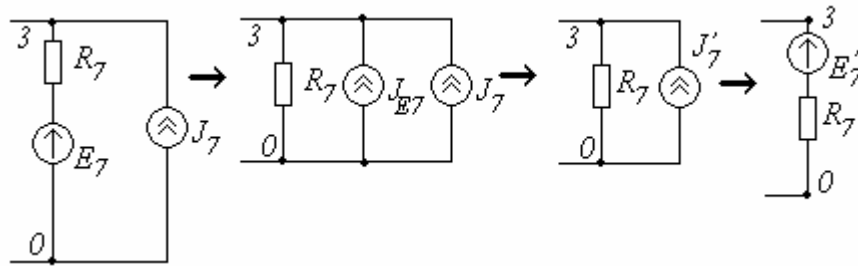


Рисунок 26 - Схема преобразования двухполюсника между узлами 3-0

Находим:

$$J_{E7} = \frac{E_7}{R_7} = \frac{8}{200} = 0,04 \text{ A};$$

$$J_7' = J_{E7} + J_7 = 0,04 + 0,1 = 0,14 \text{ A};$$

$$E_7' = J_7' R_7 = 0,14 \cdot 200 = 28 \text{ В}.$$

Получаем эквивалентную схему рисунок 27:

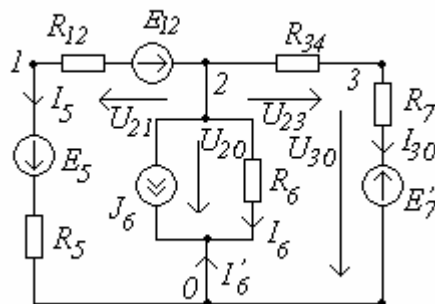


Рисунок 27 - Схема после преобразования двухполюсника 3-0

Ветви на участках 2-1; 1-0 соединены последовательно. Сопротивление этой ветви составит:

$$R_{125} = R_{12} + R_5 = 56,52 + 91 = 147,52 \text{ Ом}.$$

ЭДС этой ветви:

$$E_{125} = E_{12} - E_5 = 8,48 - 24 = -15,52 \text{ В}.$$

Ветви на участках 2-3, 3-0 соединены последовательно. Сопротивление

$$R_{347} = R_{34} + R_7 = 27633 + 200 = 227,33 \text{ Ом}.$$

Получаем двухполюсник с двумя узлами (рисунок 28).

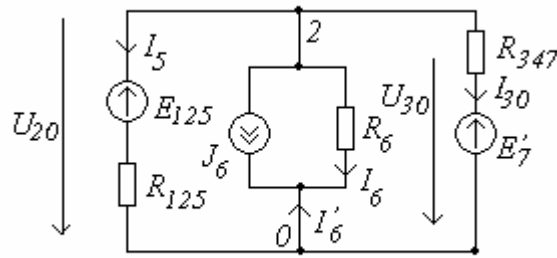


Рисунок 28 - Схема после преобразования

Рассчитываем напряжение  $U_{20}$ .

Рассчитаем схему методом узловых потенциалов:

$$G_{22}U_{20} = J_{22} ,$$

где  $G_{22} = \frac{1}{R_{125}} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_7}$  собственная проводимость ветвей, принадлежащих узлу 2;

$$J_{22} = \frac{E_{125}}{R_{125}} - J_6 + \frac{E'_7}{R_7} \text{ узловой ток.}$$

Подставляем данные:

$$G_{22} = \frac{1}{147,52} + \frac{1}{110} + \frac{1}{200} = 0,021 \text{ См,}$$

$$J_{22} = \frac{-15,52}{147,52} - 0,2 + \frac{8}{200} = -0,182 \text{ А.}$$

Напряжение

$$U_{20} = \frac{-0,185}{0,02} = -8,982 \text{ В.}$$

Рассчитываем токи:

$$I_5 = \frac{U_{20} - E_{125}}{R_{125}} = \frac{-8,982 - (-15,52)}{147,52} = 0,044 \text{ А;}$$

$$I_6 = \frac{U_{20}}{R_6} = \frac{-8,982}{110} = -0,082 \text{ А;}$$

$$I_{30} = \frac{U_{20} - E'_7}{R_{347}} = \frac{-8,982 - 28}{227,33} = -0,163 \text{ А.}$$

Ток  $I'_6$  определяем по закону Кирхгофа:

$$I_6 + I'_6 + J_6 = 0 ,$$

Откуда

$$I'_6 = -I_6 - J_6 = -0,082 - 0,2 = -0,282 \text{ А.}$$

Рассчитываем напряжения  $U_{21}$ ,  $U_{23}$  и  $U_{30}$  (рисунок 27).  
Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$U_{21} - I_5 R_{12} = E_{12} ,$$

Откуда

$$U_{21} = I_5 R_{12} + E_{12} = 0,044 \cdot 56,52 + 8,48 = 10,967 \text{ В.}$$

Напряжение:

$$\begin{aligned} U_{23} &= I_{30} R_{34} = -0,163 \cdot 27,33 = -4,446 \text{ В;} \\ U_{30} &= U_{20} - U_{23} = -8,982 - (-4,446) = -4,536 \text{ В.} \end{aligned}$$

Рассчитываем токи  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_7$  (рисунок 23).

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$U_{21} + I_1 R_1 = E_1$$

Откуда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{21}}{R_1} = \frac{15 - 10,967}{100} = 0,04 \text{ А.}$$

По закону Ома:

$$I_2 = \frac{U_{21}}{R_2} = \frac{-10,967}{130} = 0,084 \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = \frac{-4,446}{43} = -0,103 \text{ А;}$$

$$I_4 = -\frac{U_{23}}{R_4} = -\frac{-10,967}{75} = 0,059 \text{ А.}$$



По второму закону Кирхгофа имеем

$$I_7 R_7 - U_{30} = -E_7,$$

откуда

$$I_7 = \frac{U_{30} - E_7}{R_7} = \frac{-4,536 - 8}{200} = -0,063 \text{ А.}$$

Выполняем проверку правильности решения. Рассчитываем баланс мощностей.

Мощность источников определяется из выражения:

$$\begin{aligned} P_{ист} &= E_5 I_5 + E_1 I_1 - E_7 I_7 - U_{20} J_6 + U_{30} J_7 = \\ &= 24 \cdot 0,044 + 15 \cdot 0,04 - 8 \cdot (-0,063) - (-8,982)0,2 + (-4,536)0,1 = 3,511 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Мощность, рассеиваемая в резисторах:

$$\begin{aligned} P_R &= I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 = \\ &= 0,04^2 \cdot 100 + 0,084^2 \cdot 130 + (-0,103)^2 \cdot 43 + 0,059^2 \cdot 75 + 0,044^2 \cdot 91 + \\ &+ (-0,082)^2 \cdot 110 + (-0,063)^2 \cdot 200 = 3,511 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Получаем  $P_{ист} = P_R$ , задача решена, верно.

### 1.2.2 Метод уравнений Кирхгофа

Разветвленные цепи (рисунок 29) с несколькими ЭДС рассчитываются при помощи первого и второго законов Кирхгофа.

В схеме  $E_1=32 \text{ В}$ ;  $E_2=25 \text{ В}$ ;  $R_1=7 \text{ Ом}$ ;  $R_2=5 \text{ Ом}$ ;  $R_3=8 \text{ Ом}$ ;  $R_4=6 \text{ Ом}$ ;  $R_5=13 \text{ Ом}$ ;  $R_6=11 \text{ Ом}$ .

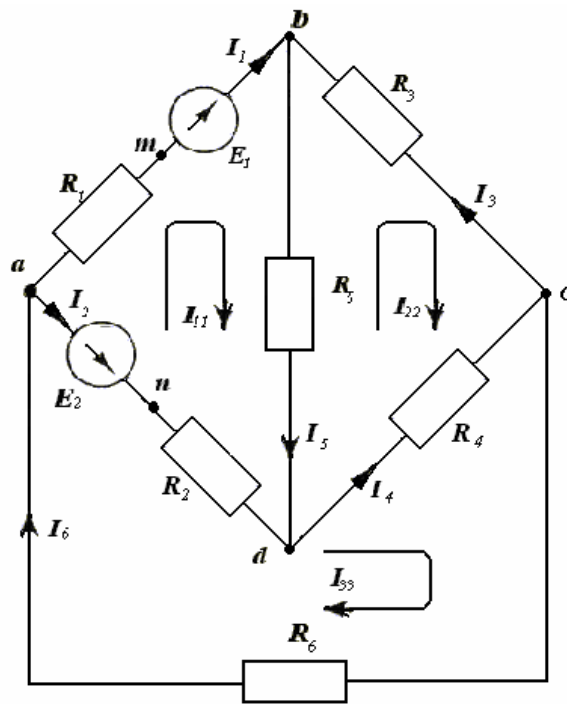


Рисунок 29 – Расчетная схема

1. Намечаем произвольно направления токов во всех ветвях (рисунок 29).
2. Составляем уравнения по первому закону Кирхгофа. Число их в общем случае на единицу меньше числа узлов (для рассматриваемой схемы с четырьмя узлами нужно составить три таких уравнения):

$$\begin{aligned}
 I_6 - I_1 - I_2 &= 0 \text{ — для узла } a; \\
 I_1 + I_3 - I_5 &= 0 \text{ — для узла } b; \\
 -I_3 + I_4 - I_6 &= 0 \text{ — для узла } c;
 \end{aligned}
 \tag{1.28}$$

3. Выбираем произвольно направление обхода каждого контура цепи (например, по часовой стрелке) и составляем уравнения по второму закону Кирхгофа. Контур, для которых составляются уравнения, нужно выбрать так, чтобы каждый из них включал в себя хотя бы одну ветвь, не вошедшую в другие контуры. Только при этом условии уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа, будут независимыми друг от друга. Поэтому и контуры, выбранные с соблюдением приведенного выше условия, принято называть независимыми. Таким образом, число уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа, должно быть равно числу независимых контуров:

$$\begin{aligned}
 I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 &= E_1 - E_2 \text{ — для контура } abda \\
 -I_5 R_5 - I_3 R_3 - I_4 R_4 &= 0 \text{ — для контура } abcd \\
 I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 &= E_2 \text{ — для контура } abca
 \end{aligned}
 \tag{1.29}$$

В этих уравнениях все ЭДС и токи, совпадающие с направлением обхода, записываются со знаком плюс; ЭДС и токи, направленные навстречу обходу — со знаком минус. Как видно из данного примера, общее число уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, равно числу неизвестных токов, т. е. числу ветвей.

Полученная система примет вид:

$$\begin{cases} I_6 - I_1 - I_2 = 0 \\ I_1 + I_3 - I_5 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ I_1 R_1 + I_5 R_5 - I_2 R_2 = E_1 - E_2 \\ -I_5 R_5 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0 \\ I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_2 \end{cases} \quad (1.30)$$

Подставляем значения сопротивлений и ЭДС:

$$\begin{cases} I_6 - I_1 - I_2 = 0 \\ I_1 + I_3 - I_5 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ I_1 \cdot 7 + I_5 \cdot 13 - I_2 \cdot 5 = 32 - 25 \\ -I_5 \cdot 5 - I_3 \cdot 8 - I_4 \cdot 6 = 0 \\ I_2 \cdot 5 + I_4 \cdot 6 + I_6 \cdot 11 = 25 \end{cases}$$

Составляем матрицы коэффициентов и вычисляем определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -8777 \quad \Delta 1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 25 & 5 & 0 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -9231$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -4910 \quad \Delta 3 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 7 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 25 & 6 & 0 & 11 \end{vmatrix} = 7587$$

$$\Delta 4 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 7 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 25 & 0 & 11 \end{vmatrix} = -6554 \quad \Delta 5 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 25 & 11 \end{vmatrix} = -1644$$

$$\Delta 6 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & -5 & 0 & 0 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 & 25 \end{vmatrix} = -14140$$

Решив полученную систему шести уравнений с шестью неизвестными, определим искомые токи:

$$I_1 = \frac{\Delta 1}{\Delta} \text{ A}; I_2 = \frac{\Delta 2}{\Delta} \text{ A}; I_3 = \frac{\Delta 3}{\Delta} \text{ A}; I_4 = \frac{\Delta 4}{\Delta} \text{ A}; I_5 = \frac{\Delta 5}{\Delta} \text{ A}; I_6 = \frac{\Delta 6}{\Delta} \text{ A};$$

$$I_1 = \frac{-9231}{-8777} = 1,052 \text{ A}; I_2 = \frac{-4910}{-8777} = 0,559 \text{ A};$$

$$I_3 = \frac{7587}{-8777} = -0,864 \text{ A}; I_4 = \frac{-6554}{-8777} = 0,747 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{-1644}{-8777} = 0,187 \text{ A}; I_6 = \frac{-14140}{-8777} = 1,611 \text{ A}.$$

Если какой-либо ток в результате расчета получился отрицательным, то это означает, что его действительное направление противоположно выбранному в п. 1.

Рассмотренный метод расчета в подавляющем большинстве случаев является достаточно громоздким и потому практически нецелесообразным. Задача значительно упрощается при использовании метода контурных токов и метода узловых потенциалов, в основу которых также положены уравнения Кирхгофа.

### 1.2.3 Метод контурных токов

1. Приписываем каждому контуру свой ток:  $I_{11}$ ,  $I_{22}$ ,  $I_{33}$  и выбираем произвольно направление каждого из них. На рисунке 29 все контурные токи направлены по часовой стрелке. Значения контурных токов должны быть равны по абсолютной величине значениям токов в несмежных ветвях, т. е.

$$I_{11} = I_1; I_{22} = -I_3; I_{33} = I_6.$$

Тогда токи во всех ветвях схемы определятся из выражений (1.28):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11}; & I_2 &= I_6 - I_1 = I_{33} - I_{11}; \\ I_3 &= -I_{22}; & I_4 &= I_3 + I_6 = I_{33} - I_{22}; \\ I_5 &= I_1 + I_3 = I_{11} - I_{22}; & I_6 &= I_{33} \end{aligned} \quad (1.31)$$

Таким образом, при использовании метода контурных токов уравнения, составленные по 1-му закону Кирхгофа, обращаются в тождества, т. е. этот закон удовлетворяется при любых значениях контурных токов. Значит, для решения задачи этим методом достаточно уравнений, составленных по 2-му закону Кирхгофа.

2. Составляем уравнения по 2-му закону Кирхгофа для контурных токов. Для этого подставим в первое из уравнений (1.29) значения токов в ветвях, приведенные в уравнениях (1.31):

$$I_{11}R_1 + (I_{11} - I_{22})R_5 - (I_{33} - I_{11})R_2 = E_1 - E_2 \quad (1.32)$$

Перегруппировав слагаемые в этом выражении, и сделав соответствующие преобразования с остальными уравнениями системы (1.29), получим уравнения для метода контурных токов:

$$\begin{aligned} I_{11}(R_1 + R_5 + R_2) - I_{22}R_5 - I_{33}R_2 &= E_1 - E_2 \\ I_{22}(R_5 + R_3 + R_4) - I_{11}R_5 - I_{33}R_4 &= 0 \\ I_{33}(R_2 + R_4 + R_6) - I_{11}R_2 - I_{22}R_4 &= E_2 \end{aligned} \quad (1.33)$$

Подставляя заданные значения э.д.с. и сопротивлений, получим:

$$\begin{aligned} I_{11} \cdot 25 - I_{22} \cdot 13 - I_{33} \cdot 5 &= 7 \\ -I_{11} \cdot 13 + I_{22} \cdot 27 - I_{33} \cdot 6 &= 0 \\ -I_{11} \cdot 5 - I_{22} \cdot 6 + I_{33} \cdot 22 &= 25 \end{aligned}$$

Совместное решение этих уравнений дает следующие значения контурных токов:

$$I_{11} = 1.05 \text{ A}; \quad I_{22} = 0.864 \text{ A}; \quad I_{33} = 1.64 \text{ A};$$

Значения токов в ветвях определяем из выражения (1.31):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} = 1.05 \text{ A}; & I_2 &= I_{33} - I_{11} = 0.56 \text{ A}; & I_3 &= -I_{22} = -0.864 \text{ A}; \\ I_4 &= I_{33} - I_{22} = 0.746 \text{ A}; & I_5 &= I_{11} - I_{22} = 0.186 \text{ A}; & I_6 &= I_{33} = 1.61 \text{ A}. \end{aligned}$$

Знак минус перед током  $I_3$  показывает, что действительное его направление противоположно выбранному. Метод контурных токов

позволяет уменьшить число уравнений, необходимых для решения задачи, до числа независимых контуров.

### 1.2.4 Метод узловых потенциалов

Если бы были известны потенциалы отдельных узлов, то ток в каждой ветви можно было бы очень просто подсчитать по закону Ома:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{E_1 - U_{BA}}{R_1} = [E_1 - (\varphi_B - \varphi_A)]G_1 = (E_1 + \varphi_a - \varphi_b)G_1 \\
 I_2 &= \frac{E_2 - U_{da}}{R_2} [E_2 - (\varphi_d - \varphi_a)]G_2 = (E_2 + \varphi_a - \varphi_d)G_2 \\
 I_3 &= \frac{U_{cb}}{R_3} = [(\varphi_c - \varphi_b)]G_3 \\
 I_4 &= \frac{U_{dc}}{R_4} = [(\varphi_d - \varphi_c)]G_4 \\
 I_5 &= \frac{U_{bd}}{R_5} = [(\varphi_b - \varphi_d)]G_5 \\
 I_6 &= \frac{U_{ca}}{R_6} = [(\varphi_c - \varphi_a)]G_6
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

Из этих соотношений видно, что токи в ветвях зависят от разностей потенциалов узлов, к которым эти ветви подсоединены. Это позволяет задать потенциалу одного из узлов любое числовое значение.

Порядок расчета рассматриваемой цепи методом узловых потенциалов следующий.

1. Полагаем потенциал какого-либо одного узла схемы (например, узла  $d$ ) равным нулю:  $\varphi_d = 0$ .

2. Для всех остальных узлов составляем уравнения по первому закону Кирхгофа (система уравнений (1.28)), выразив значения токов из формул (1.34). В этом случае уравнение для узла,  $a$  примет вид:  $(\varphi_c - \varphi_a)G_6 - (E_1 + \varphi_a - \varphi_b)G_1 - (E_2 + \varphi_a)G_2 = 0$ . Сгруппировав отдельно слагаемые, содержащие ЭДС и не содержащие их, и проделав такие же преобразования с остальными уравнениями системы (1.28), получим уравнения для метода узловых потенциалов:

$$\begin{cases} \varphi_a(G_6 + G_1 + G_2) - \varphi_b G_2 - \varphi_c G_6 = -E_1 G_1 - E_2 G_2 \\ \varphi_b(G_1 + G_3 + G_5) - \varphi_a G_1 - \varphi_c G_3 = E_1 G_1 \\ \varphi_c(G_3 + G_4 + G_6) - \varphi_a G_6 - \varphi_b G_3 = 0 \end{cases} \tag{1.35}$$

Обратите внимание на смысл написанных уравнений. Сумма токов, протекающих от данного узла под влиянием его потенциала, равна сумме

токов, притекающих к этому узлу под влиянием потенциалов соседних узлов и под влиянием ЭДС. Поэтому ЭДС, направленные к узлу, для которого составляется уравнение, записываются со знаком плюс, а ЭДС, направленные от этого узла, — со знаком минус.

3. Определим численные значения проводимостей и подставим их в последнюю систему уравнений:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = 0,143 \text{ См}; \quad G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,2 \text{ См}; \quad G_3 = \frac{1}{R_3} = 0,125 \text{ См};$$

$$G_4 = \frac{1}{R_4} = 0,167 \text{ См}; \quad G_5 = \frac{1}{R_5} = 0,077 \text{ См}; \quad G_6 = \frac{1}{R_6} = 0,091 \text{ См}.$$

$$\begin{cases} \varphi_a \cdot 0,434 - \varphi_b \cdot 0,143 - \varphi_c \cdot 0,091 = -9,56 \\ -\varphi_a \cdot 0,143 + \varphi_b \cdot 0,345 - \varphi_c \cdot 0,125 = 4,56 \\ -\varphi_a \cdot 0,091 - \varphi_b \cdot 0,125 + \varphi_c \cdot 0,383 = 0 \end{cases}$$

Совместное решение этих уравнений дает следующие значения узловых потенциалов:  $\varphi_a = -22,1 \text{ В}$ ;  $\varphi_b = 2,4 \text{ В}$ ;  $\varphi_c = -4,5 \text{ В}$ .

Тогда по уравнениям (1.34) определяем токи в ветвях:

$$I_1 = 1,07 \text{ А}; \quad I_2 = 0,58 \text{ А}; \quad I_3 = -0,861 \text{ А}; \quad I_4 = 0,751 \text{ А};$$

$$I_5 = -0,185 \text{ А}; \quad I_6 = 1,6 \text{ А}.$$

Метод узловых потенциалов позволяет уменьшить число уравнений, необходимых для решения задачи, до числа узлов без единицы.

4. Сравним результаты расчетов обоими методами и сведем в таблицу 1.

Таблица 1- Результаты расчетов двумя методами

Токи, А	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$
Метод контурных токов	1,05	0,56	-0,864	0,746	0,186	1,61
Метод узловых потенциалов	1,07	0,58	-0,861	0,751	0,185	1,6

Расхождение в результатах совпадают с достаточной точностью.

### 1.2.5 Метод активного двухполюсника

Этот метод применяется для определения тока в одной ветви.

1. Разрываем ветвь, ток в которой нужно определить, и подсчитываем напряжение между точками разрыва (напряжение холостого хода  $U_{xx}$ ). Полученная схема изображена на рисунке 30.

$$R = R_6 + R_2 + \frac{(R_3 + R_5)R_4}{R_3 + R_5 + R_4} = 16 + \frac{21 \cdot 6}{27} = 20,66 \text{ Ом}$$

$$I'_2 = \frac{E_2}{R} = \frac{25}{20,66} = 1,21 \text{ А};$$

$$I'_5 = I'_2 \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_5 + R_4} = \frac{1,21 \cdot 6}{48} = 0,69 \text{ А}.$$

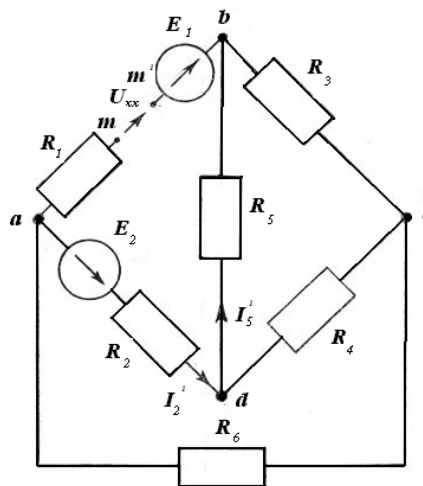


Рисунок 30 – Схема для расчета

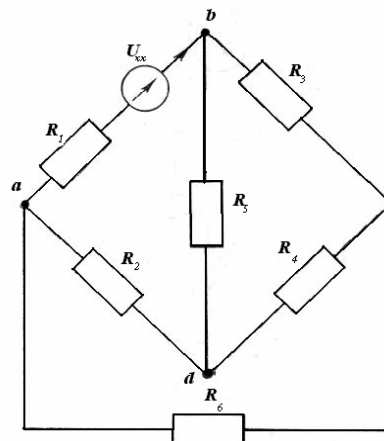


Рисунок 31- Схема для расчета после преобразования

По второму закону Кирхгофа для контура  $damm'bd$ , обходя его по часовой стрелке, подсчитаем напряжение холостого хода.



$$U_{xx} - I'_5 R_5 - I'_2 R_2 = E_1 - E_2,$$

откуда

$$U_{xx} = E_1 - E_2 + I'_5 R_5 + I'_2 R_2 = 32 - 25 + 0,269 \cdot 13 + 1,21 \cdot 5 = 16,55 \text{ В}$$

3. Замыкаем накоротко обе ЭДС, вместо разрыва вводим ЭДС, равную  $U_{xx}$  (рисунок 31). Определим входное сопротивление этой схемы (ее эквивалентное сопротивление относительно зажимов  $ab$ , к которым подключена исследуемая ветвь). Для этой цели преобразуем один из треугольников сопротивлений, например,  $R_3 R_4 R_5$  в эквивалентную звезду сопротивлений  $R_b R_c R_d$  (рисунок 32, а).

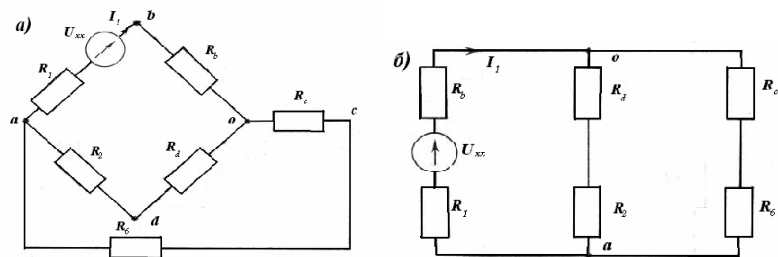


Рисунок 32 – Схема преобразования треугольника в звезду

В этой схеме:

$$R_b = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 13}{27} = 3,72 \text{ Ом};$$

$$R_c = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{8 \cdot 6}{27} = 1,778 \text{ Ом};$$

$$R_d = \frac{R_4 R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = \frac{6 \cdot 13}{27} = 2,89 \text{ Ом}.$$

В результате такого преобразования схема оказалась приведенной к последовательно-параллельной (рисунок 32, б). Она окажется эквивалентной схеме, изображенной на рисунке 33, при условии, что

$$\begin{aligned} R_{bx} &= R_b + \frac{(R_c + R_6)(R_d + R_2)}{R_c + R_6 + R_d + R_2} = 3,72 + \frac{(1,778 + 11)(2,89 + 5)}{20,668} = \\ &= 3,72 + 4,87 = 8,59 \text{ Ом} \end{aligned}$$

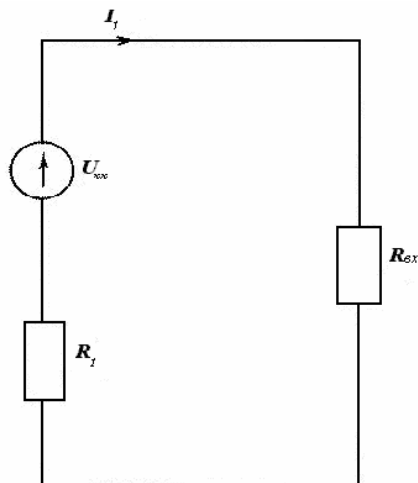


Рисунок 33 – Эквивалентная схема цепи

Тогда ток

$$I_1 = \frac{U_{кк}}{R_{эк} + R_1} = \frac{16,55}{8,59 + 7} = 1,06 \text{ А.}$$

Расчетное значение совпадает с предыдущими расчетами.

### 1.2.6 Потенциальная диаграмма

Так называют график изменения потенциала вдоль замкнутого контура.

Отложим по оси абсцисс (рисунок 34) все сопротивления контура  $dnambcd$  (см. рисунок 29), двигаясь от точки  $d$ , потенциал которой принят равным нулю. Перемещаясь вдоль этого контура, подсчитаем потенциалы всех точек. Пройдя сопротивление  $R_2$  и двигаясь навстречу току  $I_2$  (от меньшего потенциала к большему), попадаем в точку  $n$ , потенциал которой равен:

$$\varphi_n = \varphi_d + I_2 R_2 = I_2 R_2 = 0,56 \cdot 5 = 2,8 \text{ В.}$$

Потенциал следующей точки  $a$  будет меньше  $\varphi_n$  на величину ЭДС  $E_2$ :  $\varphi_a = \varphi_n - E_2 = 2,8 - 25 = -22,2 \text{ В}$ . Так как между точками  $n$  и  $a$  никакого сопротивления нет, то их абсциссы будут одинаковы.

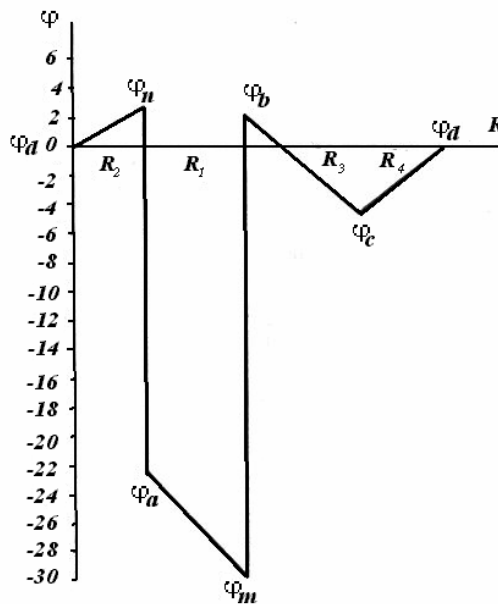


Рисунок 34 - Потенциальная диаграмма

Потенциалы остальных точек определяются аналогично:

$$\begin{aligned}\varphi_m &= \varphi_a - I_1 R_1 = -22,2 - 1,05 \cdot 7 = -29,55 \text{ В}; \\ \varphi_b &= \varphi_m + E_1 = -29,55 + 32 = 2,45 \text{ В}; \\ \varphi_c &= \varphi_b + I_3 R_3 = 2,45 + (-0,864) \cdot 8 = -4,462 \text{ В}; \\ \varphi_d &= \varphi_c + I_4 R_4 = -4,462 + 0,746 \cdot 6 \approx 0.\end{aligned}$$

Значения потенциалов узлов с достаточной точностью совпадают с найденными по методу узловых потенциалов.

### 1.2.7 Баланс мощностей

Баланс мощностей вытекает из закона сохранения энергии. Количество подведенной энергии равняется количеству использованной энергии.

$$\sum EI = \sum I^2 R \quad (1.36)$$

ЭДС в уравнение входит со знаком «плюс», если является источником энергии, со знаком «минус», если является потребителем энергии.

$$\begin{aligned}\sum EI &= E_1 I_1 + E_2 I_2 = 32 \cdot 1,05 + 25 \cdot 0,56 = 33,6 + 14 = 47,6 \text{ Вт}; \\ \sum I^2 R &= 1,05^2 \cdot 7 + 0,56^2 \cdot 5 + 0,864^2 \cdot 8 + 0,746^2 \cdot 6 + 0,186^2 \cdot 13 + \\ &+ 1,61^2 \cdot 11 = 7,72 + 1,57 + 5,96 + 3,35 + 0,45 + 28,5 = 46,55 \text{ Вт}.\end{aligned}$$

Расхождения в результатах вычислений не превосходят 2,2 %.

### 1.2.8 Метод двух узлов

Частным случаем, метода узловых потенциалов является метод двух узлов, применимый только для цепи с двумя узлами. Он позволяет сразу подсчитать напряжение между узлами цепи.

Порядок расчета методом двух узлов следующий:

1. Принимают положительное направление ЭДС эквивалентной цепи.
2. Определяют напряжение узлов  $ab$  по выражению:

$$U_{ab} = \frac{\sum E_k \cdot G_k + \sum J_k}{\sum G_k} \quad (1.37)$$

где  $E_k$  – ЭДС ветви;

$G_k$  – проводимость ветви;

$J_k$  – ток источника тока ветви.

ЭДС и ток источника тока в уравнение входят со знаком «плюс», если их направление совпадает с выбранным направлением эквивалентной цепи. Если направления не совпадают, ЭДС и ток источника тока входят в уравнение со знаком «минус».

3. Определив напряжение двух узлов, определяют токи в ветвях по выражению:

$$I_n = (E_n - U_{ab}) \cdot G_n \quad (1.38)$$

Если в результате расчетов значение токов отрицательно, то действительное направление токов противоположно выбранному.

### 1.2.9 Метод наложения

При расчете разветвленных электрических цепей с несколькими источниками энергии иногда удается обойтись без решения системы уравнений, если применить метод наложения. В соответствии с этим методом токи в ветвях схемы рассматриваются как алгебраическая сумма токов от каждой ЭДС в отдельности.

Этот метод основан на принципе наложения, который заключается в следующем: полагают, что каждый источник вырабатывает свой частичный ток в ветвях, а действительные токи равняются алгебраической сумме частичных токов.

Порядок расчета этим методом следующий:

1. В схеме закорачивают все ЭДС, кроме одной и определяют частичные токи от действия одной ЭДС. Затем в схеме оставляют другую ЭДС и также определяют частичные токи. Так поочередно определяют частичные токи от действия всех ЭДС, имеющих в схеме.

2. Определяют действительные токи как алгебраическую сумму частичных токов в ветвях.

Следует иметь ввиду, что при большом числе источников расчет электрической цепи методом наложения сильно усложняется, так как увеличивается число вспомогательных схем и конфигурация каждой из них становится более сложной. По этой причине такой расчет может привести к значительным погрешностям при вычислениях.

### 1.2.10 Топология электрической цепи

Электрическая цепь характеризуется совокупностью элементов, из которых она состоит, и способом их соединения. Соединение элементов электрической цепи наглядно отображается ее схемой. Рассмотрим для примера две электрические схемы (рисунки 35-36), введя понятие ветви и узла.

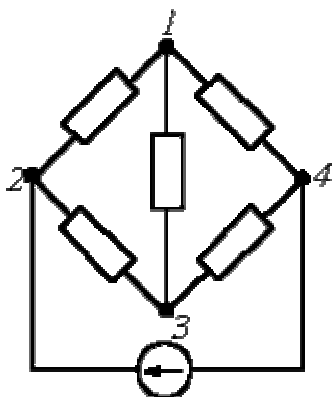


Рисунок 35- Исследуемая схема

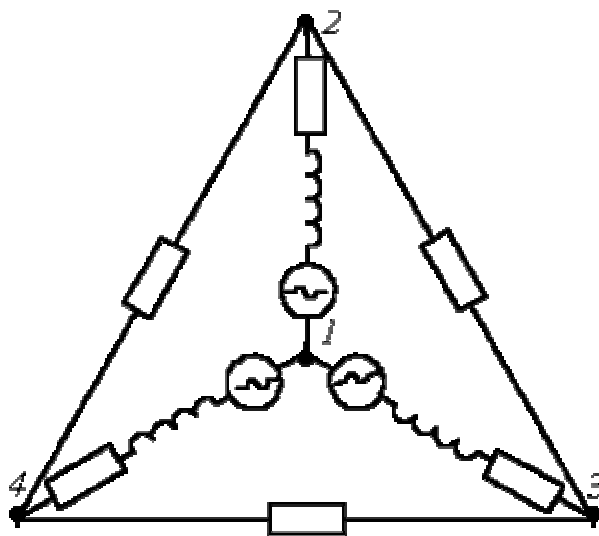


Рисунок 36- Исследуемая схема

**Ветвью** называется участок цепи, обтекаемый одним и тем же током.

**Узел** – место соединения трех и более ветвей.

Представленные схемы различны и по форме, и по назначению, но каждая из указанных цепей содержит по 6 ветвей и 4 узла, одинаково соединенных. Таким образом, в смысле геометрии (топологии) соединений ветвей данные схемы идентичны.

Топологические (геометрические) свойства электрической цепи не зависят от типа и свойств элементов, из которых состоит ветвь. Поэтому целесообразно каждую ветвь схемы электрической цепи изобразить отрезком линии. Если каждую ветвь схем на рисунках 35 и 36 заменить отрезком линии, получается геометрическая фигура, показанная на рисунке 37.

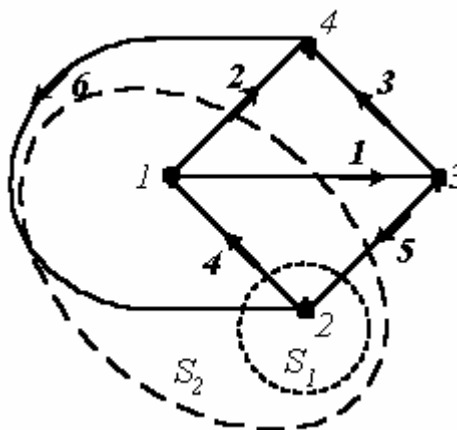


Рисунок 37 – Граф электрической схемы

Условное изображение схемы, в котором каждая ветвь заменяется отрезком линии, называется **графом** электрической цепи. При этом следует помнить, что ветви могут состоять из каких-либо элементов, в свою очередь соединенных различным образом.

Отрезок линии, соответствующий ветви схемы, называется **ветвью графа**. Граничные точки ветви графа называют **узлами графа**. Ветвям графа может быть дана определенная ориентация, указанная стрелкой. Граф, у которого все ветви ориентированы, называется **ориентированным**.

**Подграфом графа** называется часть графа, т.е. это может быть одна ветвь или один изолированный узел графа, а также любое множество ветвей и узлов, содержащихся в графе.

В теории электрических цепей важное значение имеют следующие подграфы:

1. **Путь** – это упорядоченная последовательность ветвей, в которой каждые две соседние ветви имеют общий узел, причем любая ветвь и любой узел встречаются на этом пути только один раз. Например, в схеме на рисунке 37 ветви 2-6-5; 4-5; 3-6-4; 1 образуют пути между одной и той же парой узлов 1 и 3. Таким образом, путь – это совокупность ветвей, проходимых непрерывно.

2. **Контур** – замкнутый путь, в котором один из узлов является начальным и конечным узлом пути. Например, для графа по рисунке 37 можно определить контуры, образованные ветвями 2-4-6; 3-5-6; 2-3-5-4. Если между любой парой узлов графа существует связь, то граф называют связным.

3. **Дерево** – это связный подграф, содержащий все узлы графа, но ни одного контура. Примерами деревьев для графа на рисунке 37 могут служить фигуры на рисунке 38.

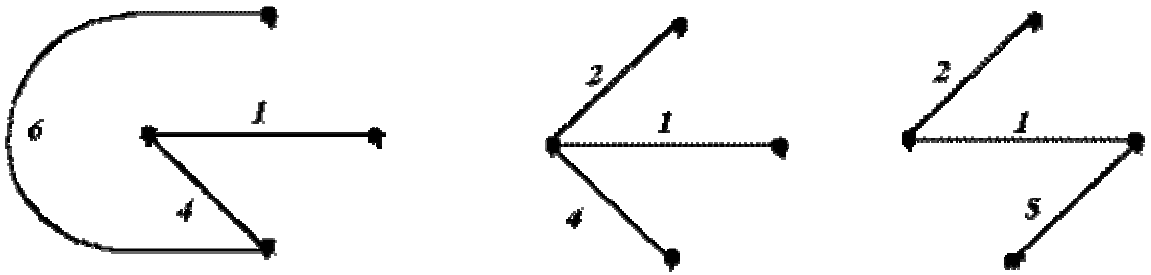


Рисунок 38 – Примеры деревьев для графа

4. **Ветви связи** (дополнения дерева) – это ветви графа, дополняющие дерево до исходного графа.

Если граф содержит  $m$  узлов и  $n$  ветвей, то число ветвей любого дерева  $d = m - 1$ , а числа ветвей связи графа  $c = n - (m - 1) = n - m + 1$ .

5. **Сечение графа** – множество ветвей, удаление которых делит граф на два изолированных подграфа, один из которых, в частности, может быть отдельным узлом.

Сечение можно наглядно изобразить в виде следа некоторой замкнутой поверхности, рассекающей соответствующие ветви. Примерами таких поверхностей являются для нашего графа на рисунке 37  $S_1$  и  $S_2$ . При этом получаем соответственно сечения, образованные ветвями 6-4-5 и 6-2-1-5.

С понятием дерева связаны понятия главных контуров и сечений:

**главный контур** – контур, состоящий из ветвей дерева и только одной ветви связи;

**главное сечение** – сечение, состоящее из ветвей связи и только одной ветви дерева.

### 1.2.11 Топологические матрицы

Задать вычислительной машине топологию цепи рисунком затруднительно, так как не существует эффективных программ распознавания образа. Поэтому топологию цепи вводят в ЭВМ в виде матриц, которые называют топологическими матрицами. Выделяют три таких матрицы: узловую матрицу, контурную матрицу и матрицу сечений.

1. **Узловая матрица** (матрица соединений) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа. Строки этой матрицы соответствуют узлам, а столбцы – ветвям схемы.

Для графа на рисунке 37 имеем число узлов  $m=4$  и число ветвей  $n=6$ .

Тогда запишем матрицу  $A_n$ , принимая, что элемент матрицы  $a_{ij}$  ( $i$ –номер строки;  $j$ –номер столбца) равен 1, если ветвь  $j$  соединена с узлом  $i$  и ориентирована от него, -1, если ориентирована к нему, и 0, если ветвь  $j$  не соединена с узлом  $i$ . Сориентировав ветви графа на рисунке 37, получим

$$A_H = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Данная матрица  $A_H$  записана для всех четырех узлов и называется неопределенной. Следует указать, что сумма элементов столбцов матрицы  $A_H$  всегда равна нулю, так как каждый столбец содержит один элемент +1 и один элемент -1, остальные нули.

Обычно при расчетах один (любой) заземляют. Тогда приходим к узловой матрице  $A$  (редуцированной матрице), которая может быть получена из матрицы  $A_H$  путем вычеркивания любой ее строки. Например, при вычеркивании строки "4" получим

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Число строк матрицы  $A$  равно числу независимых уравнений для узлов  $\partial = m - 1$ , т.е. числу уравнений, записываемых для электрической схемы по первому закону Кирхгофа. Итак, введя понятие узловой матрицы  $A$ , перейдем к первому закону Кирхгофа.

### Первый закон Кирхгофа

Обычно первый закон Кирхгофа записывается для узлов схемы, но, строго говоря, он справедлив не только для узлов, но и для любой замкнутой поверхности, т.е. справедливо соотношение

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = 0 \quad (1.39)$$

где  $\vec{j}$  - вектор плотности тока;

$d\vec{S}$  - нормаль к участку  $dS$  замкнутой поверхности  $S$ .

Первый закон Кирхгофа справедлив и для любого сечения. В частности, для сечения  $S_2$  графа на рисунке 37, считая, что нумерация и направления токов в ветвях соответствуют нумерации и выбранной ориентации ветвей графа, можно записать



$$I_1 + I_2 - I_3 - I_6 = 0.$$

Поскольку в частном случае ветви сечения сходятся в узле, то первый закон Кирхгофа справедлив и для него. Пока будем применять первый закон Кирхгофа для узлов, что математически можно записать, как:

$$\sum_k I_k = 0 \quad (1.40)$$

т.е. алгебраическая сумма токов ветвей, соединенных в узел, равна нулю.

При этом при расчетах уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для **(m-1)** узлов, так как при записи уравнений для всех **m** узлов одно (любое) из них будет линейно зависимым от других, т.е. не дает дополнительной информации.

Введем столбцовую матрицу токов ветвей

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

Тогда первый закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид:

$$AI = 0 \quad (1.41)$$

– где **0**- нулевая матрица-столбец.

Как видим, в качестве узловой взята матрица **A**, а не **A<sub>н</sub>**, т.к. с учетом вышесказанного уравнения по первому закону Кирхгофа записываются для **(m-1)** узлов.

В качестве примера запишем для схемы на рисунке 37

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отсюда для первого узла получаем

$$1 \cdot I_1 + 1 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 - 1 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 + 0 \cdot I_6 = I_1 + I_2 - I_4 = 0,$$

что и должно иметь место.

2. **Контурная матрица** (матрица контуров) – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по второму закону Кирхгофа. Строки контурной матрицы **V** соответствуют контурам, а столбцы – ветвям схемы.

Элемент  $b_{ij}$  матрицы **V** равен 1, если ветвь **j** входит в контур **i** и ее ориентация совпадает с направлением обхода контура, -1, если не совпадает с направлением обхода контура, и 0, если ветвь **j** не входит в контур **i**.

Матрицу **V**, записанную для главных контуров, называют матрицей главных контуров. При этом за направление обхода контура принимают направление ветви связи этого контура. Выделив в нашем примере (см. рисунок 39) дерево, образуемое ветвями 2-1-4, запишем коэффициенты для матрицы **V**.

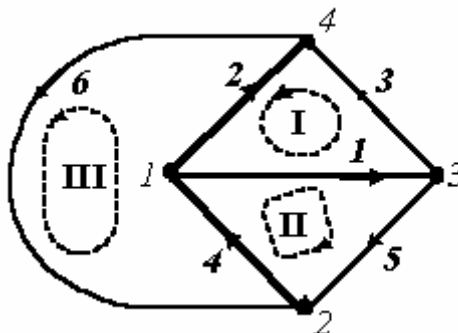


Рисунок 39-Дерево графа

$$\mathbf{V} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

**Перейдем теперь ко второму закону Кирхгофа.**

Под напряжением на некотором участке электрической цепи понимается разность потенциалов между крайними точками этого участка, т.е.

$$U_{ke} = \varphi_k - \varphi_e = -(\varphi_e - \varphi_k) = -U_{ek} \quad (1.42)$$

Просуммируем напряжения на ветвях некоторого контура:

$$\begin{aligned}
 &U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \\
 &+ \\
 &U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 \\
 &+ \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ \\
 &U_{k1} = \varphi_k - \varphi_1 \\
 &\hline
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Поскольку при обходе контура потенциал каждой  $i$ -ой точки встречается два раза, причем один раз с “+”, а второй – с “-”, то в целом сумма равна нулю.

Таким образом, второй закон Кирхгофа математически записывается, как:

$$\sum_k U_k = 0, \quad (1.43)$$

- и имеет место следующую формулировку: алгебраическая сумма напряжений на зажимах ветвей (элементов) контура равна нулю. При этом при расчете цепей с использованием законов Кирхгофа записывается  $s = (n - m + 1)$  независимых уравнений по второму закону Кирхгофа, т.е. уравнений, записываемых для контуров, каждый из которых отличается от других хотя бы одной ветвью. Значение топологического понятия “дерева”: дерево позволяет образовать независимые контуры и сечения и, следовательно, формировать независимые уравнения по законам Кирхгофа. Таким образом, с учетом  $(m-1)$  уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа, получаем систему из  $(m-1) + (n-m+1) = n$  уравнений, что равно числу ветвей схемы и, следовательно, токи в них находятся однозначно.

Введем столбцовую матрицу напряжений ветвей

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}$$

Тогда второй закон Кирхгофа в матричной форме записи имеет вид

$$\mathbf{BU} = \mathbf{0}. \quad (1.44)$$

В качестве примера для схемы рисунке 39 имеем

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = [0]$$

откуда, например, для первого контура получаем

$$1 \cdot U_1 - 1 \cdot U_2 + 1 \cdot U_3 + 0 \cdot U_4 + 0 \cdot U_5 + 0 \cdot U_6 = U_1 - U_2 + U_3 = 0,$$

что и должно иметь место.

Если ввести столбцовую матрицу узловых потенциалов

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{m-1} \end{bmatrix}$$

причем потенциал последнего узла  $\varphi_m = 0$ , то матрица напряжений ветвей и узловых потенциалов связаны соотношением

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^T \varphi \quad (1.45)$$

где  $\mathbf{A}^T$  - транспонированная узловая матрица.

Для определения матрицы  $\mathbf{B}$  по известной матрице  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_d \mathbf{A}_c$ , где  $\mathbf{A}_d$  - подматрица, соответствующая ветвям некоторого дерева,  $\mathbf{A}_c$  - подматрица, соответствующая ветвям связи, может быть использовано соотношение

$$\mathbf{B} = (-\mathbf{A}_c^T \mathbf{A}_d^{-1T} \mathbf{I})$$

3. **Матрица сечений** – это таблица коэффициентов уравнений, составленных по первому закону Кирхгофа для сечений. Ее строки соответствуют сечениям, а столбцы – ветвям графа.

Матрица **Q**, составленная для главных сечений, называется матрицей главных сечений. Число строк матрицы **Q** равно числу независимых сечений. Элемент  $q_{ij}$  матрицы **Q** равен 1, если ветвь входит в *i*-е сечение и ориентирована согласно направлению сечения (за положительное направление сечения принимают направление ветви дерева, входящей в него), -1, если ориентирована противоположно направлению сечения, и 0, если ветвь *j* не входит в *i*-е сечение.

В качестве примера составим матрицу **Q** главных сечений для графа на рис. 39. При указанной на рисунке 39 ориентации ветвей имеем

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

В заключение отметим, что для топологических матриц **A**, **B** и **Q**, составленных для одного и того же графа, выполняются соотношения

$$AB^T = 0; \quad (1.46)$$

$$QB^T = 0, \quad (1.47)$$

которые, в частности, можно использовать для проверки правильности составления этих матриц. Здесь **0** – нулевая матрица порядка  $\delta$ .

Приведенные уравнения позволяют сделать важное заключение: зная одну из топологических матриц, по ее структуре можно восстановить остальные.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрической цепи.
2. Назовите эквивалентные схемы источников электрической энергии, начертите и объясните схемы их соединения.
3. Сформулируйте основные законы электрических цепей.
4. Опишите порядок расчета разветвленной цепи с одним источником.
5. В какой последовательности строится потенциальная диаграмма?
6. Для чего производят преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и обратно? Выведите формулы преобразований.

7. Перечислите методы расчета разветвленных линейных электрических цепей с несколькими источниками, опишите каждый из них и укажите его достоинства и недостатки.

8. Сформулируйте основные топологические понятия для электрических цепей.

9. Что такое узловая матрица?

10. Что такое контурная матрица?

11. Что такое матрица сечений?

### 1.2.12 Решение типовых задач

#### Задача 1.2.1

В одну из ветвей сложной электрической цепи включен генератор (рисунок 40), а в другую- аккумуляторная батарея. ЭДС генератора  $E_1=200$  В, внутреннее сопротивление  $R_{01}=1$  Ом, ЭДС батареи  $E_2=140$  В, внутреннее сопротивление  $R_{02}=0,5$  Ом, источник тока  $J=2.8$  А, сопротивление резисторов  $R_1=9$  Ом,  $R_2=19,5$  Ом,  $R_3=4$  Ом.

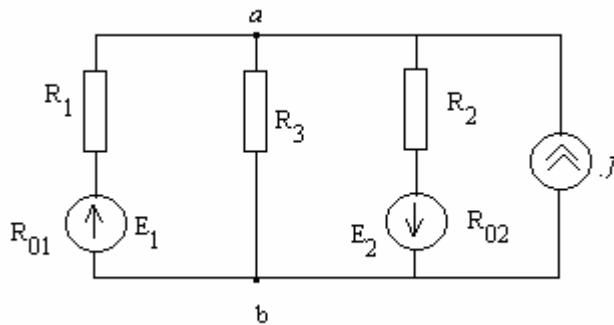


Рисунок 40 – Схема к задаче 1.2.1

#### Решение

##### Метод двух узлов

Составляем уравнение для расчета напряжения двух узлов  $ab$  и определяем напряжение:

$$U_{ab} = \frac{E_1 \frac{1}{R_1 + R_{01}} - E_2 \frac{1}{R_2 + R_{02}} + J}{\frac{1}{R_1 + R_{01}} + \frac{1}{R_2 + R_{02}} + \frac{1}{R_3}}$$

$$U_{ab} = \frac{200 \frac{1}{9+1} - 140 \frac{1}{19.5+0.5} + 2.8}{\frac{1}{9+1} + \frac{1}{19.5+0.5} + \frac{1}{5}} = 22 \text{ В}$$

Определяем токи в ветвях:

$$I_1 = (E_1 - U_{ab}) \frac{1}{R_1 + R_{01}} = (200 - 22) \frac{1}{9 + 1} = 17.8 \text{ A}$$

$$I_2 = (-E_2 - U_{ab}) \frac{1}{R_2 + R_{02}} = (-140 - 22) \frac{1}{19.5 + 0.5} = -16.2 \text{ A}$$

$$I_3 = (0 - U_{ab}) \frac{1}{R_3} = (0 - 22) \frac{1}{5} = -4.4 \text{ A}$$

Действительные направления токов во второй и третьей ветвях противоположны выбранному положительному направлению, так как расчетные значения отрицательные.

Выполним проверку по 1 закону Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 + I_3 + J = 17.8 - 16.2 - 4.4 + 2.8 = 0$$

Расчет выполнен, верно.

### Задача 1.2.2

Рассчитать токи ветвей в электрической цепи (рисунок 41). Параметры резисторов:  $R_1=200 \text{ Ом}$ ,  $R_{21}=100 \text{ Ом}$ ,  $R_{22}=200 \text{ Ом}$ ,  $R_3=125 \text{ Ом}$ ,  $R_4= R_3 \text{ Ом}$ ,  $R_5=50 \text{ Ом}$ ,  $R_6=60 \text{ Ом}$ . Источники:  $E_3=15 \text{ В}$ ,  $E_6=30 \text{ В}$ ,  $J_4=1 \text{ А}$ . Выполнить проверку балансом мощности.

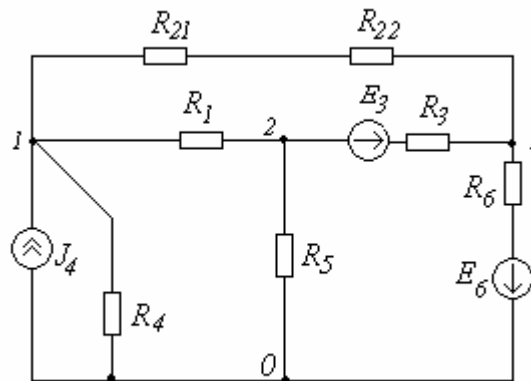


Рисунок 41 - Схема к задаче 1.2.2

### Решение

#### Метод узловых и контурных уравнений

Составляем уравнения по первому и второму законам Кирхгофа (рисунок 42), учитывая выбранные направления:

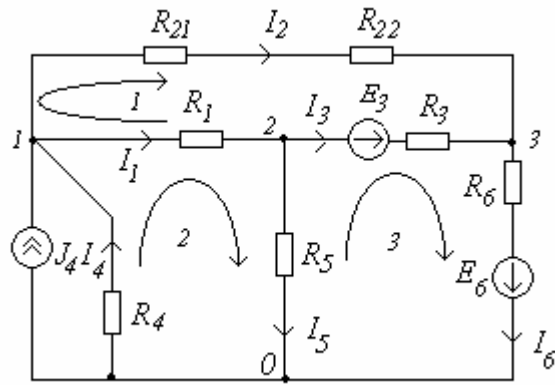


Рисунок 42 – К расчету методом узловых и контурных уравнений

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + J_4 + I_4 = 0 \\ I_1 - I_3 - I_5 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_6 = 0 \\ -I_1 R_1 + I_2 (R_{21} + R_{22}) - I_3 R_3 = -E_3 \\ I_1 R_1 + I_4 R_4 + I_5 R_5 = 0 \\ I_3 R_3 - I_5 R_5 + I_6 R_6 = E_3 + E_6 \end{cases}$$

Подставляем известные значения

$$\begin{cases} -I_1 - I_2 + I_4 = -1 \\ I_1 - I_3 - I_5 = 0 \\ I_2 + I_3 - I_6 = 0 \\ -I_1 200 + I_2 (100 + 200) - I_3 125 = -15 \\ I_1 200 + I_4 125 + I_5 50 = 0 \\ I_3 125 - I_5 50 + I_6 60 = 15 + 30 \end{cases}$$

Решаем систему матричным уравнением:

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$$

$$M = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -200 & 300 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 & 125 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 125 & 0 & -50 & 60 \end{vmatrix} \quad V = \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 45 \end{vmatrix}$$



$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0,285 \\ 0,222 \\ 0,196 \\ -0,493 \\ 0,09 \\ 0,417 \end{vmatrix}$$

Ток  $I_4$  направлен противоположно выбранному направлению.  
Рассчитываем баланс мощностей.  
Мощность источника:

$$P_u = E_3 I_3 + E_6 I_6 + J_4 R_4 I_4 = 15 \cdot 0,196 + 30 \cdot 0,417 + 1 \cdot 125 \cdot 0,493 = 77,045 \text{ Вт}$$

Мощность потребителя:

$$P_H = I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_{21} + R_{22}) + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 = 0,285^2 200 + 0,222^2 (100 + 200) + 0,196^2 125 + 0,493^2 125 + 0,09^2 50 + 0,417^2 60 = 77,045 \text{ Вт}$$

Баланс сошелся, решение выполнено, верно.

### Метод контурных токов

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов (рисунок 43):

$$\begin{cases} I_{11}(R_1 + R_{21} + R_{22} + R_3) - I_{22}R_1 - I_{33}R_3 = -E_3 \\ I_{22}(R_1 + R_5 + R_4) - I_{11}R_1 - I_{33}R_5 - I_{44}R_4 = 0 \\ I_{33}(R_3 + R_5 + R_6) - I_{11}R_3 - I_{22}R_5 = E_3 + E_6 \\ I_{44} = J_4 \end{cases}$$

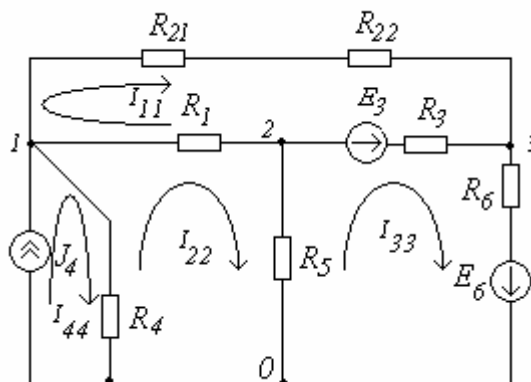


Рисунок 43 – К расчету методом контурных токов

Решаем систему матричным уравнением:

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 625 & -200 & -125 \\ -200 & 375 & -50 \\ -125 & -50 & 235 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{vmatrix} -15 \\ 125 \\ 45 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 0,222 \\ 0,507 \\ 0,417 \end{vmatrix}$$

Определяем действительные токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{22} = 0,222 - 0,507 = -0,285 \text{ A}; \\ I_2 &= I_{11} = 0,222 \text{ A}; \\ I_3 &= I_{11} - I_{33} = 0,222 - 0,417 = -0,196 \text{ A}; \\ I_4 &= I_{44} - I_{22} = 1 - 0,507 = 0,493 \text{ A}; \\ I_5 &= I_{22} - I_{33} = 0,507 - 0,417 = 0,09 \text{ A}; \\ I_6 &= I_{33} = 0,417 \text{ A}. \end{aligned}$$

Значения токов совпадают с предыдущим расчетом.

### Метод узловых потенциалов

В схеме (рисунок 41) четыре узла. В качестве базового выбираем узел 0. Для оставшихся узлов составляем уравнения:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_{10} - G_{12}\varphi_{20} - G_{13}\varphi_{30} = J_{11} \\ -G_{21}\varphi_{10} + G_{22}\varphi_{20} - G_{23}\varphi_{30} = J_{22} \\ -G_{31}\varphi_{10} - G_{32}\varphi_{20} + G_{33}\varphi_{30} = J_{33} \end{cases}$$

Определяем собственные проводимости узлов 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100 + 200} + \frac{1}{125} = 0,016 \text{ См}; \\ G_{22} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} = \frac{1}{200} + \frac{1}{125} + \frac{1}{50} = 0,033 \text{ См}; \\ G_{33} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_6} = \frac{1}{125} + \frac{1}{100 + 200} + \frac{1}{60} = 0,028 \text{ См}. \end{aligned}$$

Определяем взаимные проводимости:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{125} = 0,008 \text{ См};$$

$$G_{31} = G_{13} = \frac{1}{R_{21} + R_{22}} = \frac{1}{100 + 200} = 0,00333 \text{ См}.$$

Определяем узловые токи:

$$J_{11} = J_4 = 1 \text{ А};$$

$$J_{22} = -\frac{E_3}{R_3} = -\frac{15}{125} = -0,12 \text{ А};$$

$$J_{33} = \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6} = \frac{15}{125} - \frac{30}{60} = 0,417 \text{ А}.$$

Получаем уравнение для расчета узловых потенциалов:

$$\begin{cases} 0,016\varphi_{10} - 0,005\varphi_{20} - 0,00333\varphi_{30} = 1 \\ -0,005\varphi_{10} + 0,033\varphi_{20} - 0,008\varphi_{30} = -0,12 \\ -0,00333\varphi_{10} - 0,008\varphi_{20} + 0,028\varphi_{30} = 0,417 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем потенциалы в узлах:

$$\varphi_{10} = 61,589 \text{ В};$$

$$\varphi_{20} = 4,494 \text{ В};$$

$$\varphi_{30} = -4,955 \text{ В}.$$

Токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{20}}{R_1} = \frac{61,589 - 4,494}{200} = 0,285 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{\varphi_{10} - \varphi_{30}}{R_{21} + R_{22}} = \frac{61,589 - (-4,955)}{100 + 200} = 0,222 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{E_3 - (\varphi_{30} - \varphi_{20})}{R_3} = \frac{15 - (-4,955 - 4,494)}{125} = 0,285 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{\varphi_{10} - 0}{R_4} = \frac{61,589 - 0}{125} = 0,493 \text{ А};$$

$$I_5 = \frac{\varphi_{20} - 0}{R_5} = \frac{4,494 - 0}{50} = 0,285 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{E_6 - (\varphi_{30} - 0)}{R_6} = \frac{30 - (-4,955 - 0)}{60} = 0,417 \text{ А}.$$

Токи, рассчитанные различными методами, совпадают.

### Задача 1.2.3

Рассчитать токи ветвей в электрической цепи (рисунок 44). Параметры резисторов:  $R_1=200$  Ом,  $R_2=100$  Ом,  $R_3=125$  Ом,  $R_4=R_3$  Ом. Источники:  $E=15$  В,  $J=0,5$  А. Выполнить проверку балансом мощности.

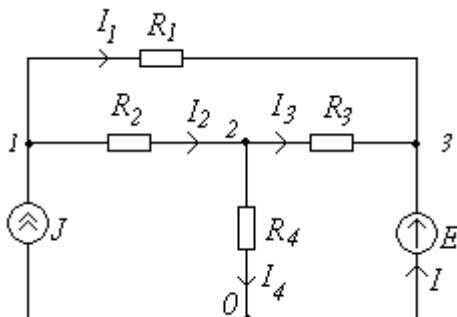


Рисунок 44 – Схема к задаче 1.2.3

### Решение

Определяем положительные направления токов ветвей (рисунок 44). В схеме три независимых узла. В качестве базисного принимаем узел 0, потенциал узла 3 равен ЭДС идеального источника:

$$\varphi_{30} = E = 15 \text{ В.}$$

Узловые уравнения для узлов 1 и 2 имеют вид:

$$\begin{cases} G_{11}\varphi_{10} - G_{12}\varphi_{20} - G_{13}\varphi_{30} = J_{11} \\ -G_{21}\varphi_{10} + G_{22}\varphi_{20} - G_{23}\varphi_{30} = J_{22} \end{cases}$$

Определяем собственные проводимости узлов 1 и 2:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200} + \frac{1}{100} = 0,015 \text{ См};$$

$$G_{22} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{100} + \frac{1}{125} + \frac{1}{125} = 0,026 \text{ См.}$$

Определяем взаимные проводимости:

$$G_{12} = G_{21} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ См};$$

$$G_{23} = G_{32} = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{125} = 0,008 \text{ См};$$

$$G_{31} = G_{13} = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{200} = 0,005 \text{ См.}$$

Определяем узловые токи:

$$\begin{aligned} J_{11} &= J = 0,5 \text{ А;} \\ J_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Получаем уравнение для расчета узловых потенциалов:

$$\begin{cases} 0,015\varphi_{10} - 0,01\varphi_{20} - 0,005 \cdot 15 = 0,5 \\ -0,015\varphi_{10} + 0,026\varphi_{20} - 0,008 \cdot 15 = 0 \end{cases}$$

Решив систему уравнений, найдем потенциалы в узлах:

$$\begin{aligned} \varphi_{10} &= 55,7 \text{ В;} \\ \varphi_{20} &= 26,03 \text{ В.} \end{aligned}$$

Токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\varphi_{10} - \varphi_{30}}{R_1} = \frac{55,7 - 15}{200} = 0,2 \text{ А;} \\ I_2 &= \frac{\varphi_{10} - \varphi_{20}}{R_2} = \frac{55,7 - 26,03}{100} = 0,3 \text{ А;} \\ I_3 &= \frac{\varphi_{20} - \varphi_{30}}{R_3} = \frac{26,03 - 15}{125} = 0,09 \text{ А;} \\ I_4 &= \frac{\varphi_{20} - 0}{R_4} = \frac{26,03 - 0}{125} = 0,21 \text{ А.} \end{aligned}$$

Ток  $I$  в ветви с ЭДС определяем из уравнения Кирхгофа для узла 3. Получаем:

$$I = -I_1 - I_3 = 0,2 - 0,09 = -0,29 \text{ А.}$$

Рассчитываем баланс мощностей.

Мощность источников:

$$P_{ист} = (\varphi_{10} - 0) \cdot J + E \cdot I = 55,7 \cdot 0,5 + 15 \cdot (-0,29) = 23,47 \text{ Вт.}$$

Мощность, рассеиваемая в резисторах:

$$P_H = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 = 0,2^2 \cdot 200 + 0,3^2 \cdot 100 + 0,09^2 \cdot 125 + 0,21^2 \cdot 125 = 23,47 \text{ Вт.}$$

Баланс мощностей выполняется.

### 1.3 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей постоянного тока

#### 1.3.1 Решение систем уравнений

Многие процессы, происходящие в электрических цепях постоянного и переменного тока, можно описать с помощью систем уравнений. Тогда определение параметров электрической цепи сводится к определению корней системы уравнений.

Существуют прямые и итерационные (от латинского *iteratio* – повторение) методы решения систем уравнений. К прямым методам относят метод Крамера, методы последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса и его модификации: метод главного элемента, метод квадратного корня, метод отражений).

Прямые методы дают точные результаты решения системы за конечное число математических операций. Если все операции выполняются точно без округлений, то решение заданной системы получается точным.

В программе MathCAD существует несколько вариантов решения систем уравнений прямыми методами. При решении уравнений (неравенств) описанными ниже способами результаты вычислений будут автоматически обновляться при изменении условий.

#### Применение панели инструментов символьных вычислений

При использовании панели символьных вычислений систему уравнений (неравенств) задают матрицей, число строк которой равно числу уравнений (неравенств), столбец один. При записи уравнений (неравенств) применяют панель логических операторов. Затем выбирают команду **solve** (вычислить) на панели инструментов **Symbolics** (Символьные) и в ячейку вводят имена переменных, относительно которых необходимо решить уравнение (неравенство). Размер матрицы, содержащей переменные, соответствует размеру матрицы уравнений.

Например, решим задачу (рисунок 29) по законам Кирхгофа:  
Задаем параметры электрической цепи:

$$E1 := 32 \quad E2 := 25 \quad R1 := 7 \quad R2 := 5 \quad R3 := 8 \quad R4 := 6 \quad R5 := 13 \quad R6 := 11$$

$$\begin{pmatrix} -I_1 - I_2 + I_6 = 0 \\ I_1 + I_3 - I_5 = 0 \\ -I_3 + I_4 - I_6 = 0 \\ I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_5 R_5 = E_1 - E_2 \\ -I_3 R_3 - I_4 R_4 - I_5 R_5 = 0 \\ I_2 R_2 + I_4 R_4 + I_6 R_6 = E_2 \end{pmatrix} \text{solve} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} \rightarrow \left( \frac{9231}{8777} \frac{4910}{8777} \frac{-7587}{8777} \frac{6554}{8777} \frac{1644}{8777} \frac{1414}{8777} \right) = (1.0520.559-0.8640.7470.1871.611)$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  A;  $I_2=0.559$  A;  $I_3=-0.864$  A;  $I_4=0.747$  A;  $I_5=0.187$  A;  $I_6=1.611$  A.

## Применение встроенных функций

Для решения системы уравнений задают матрицу коэффициентов, которая не должна быть вырожденной, и вектор свободных членов. Используя встроенную функцию **Isolve**, в скобках отделив запятой, указывают имена переменных матрицы коэффициентов и вектора свободных членов.

Например:

Для решения системы уравнений следует определить матрицу коэффициентов и указать вектор свободных коэффициентов:

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ R1 & -R2 & 0 & 0 & R5 & 0 \\ 0 & 0 & -R3 & -R4 & -R5 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & R4 & 0 & R6 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$i := \text{Isolve}(M, V)$$

$$i = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 0.559 \\ -0.864 \\ 0.747 \\ 0.187 \\ 1.611 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  A;  $I_2=0.559$  A;  $I_3=-0.864$  A;  $I_4=0.747$  A;  $I_5=0.187$  A;  $I_6=1.611$  A.

Результат вычислений совпадают с предыдущим расчетом.

## Применение символьного блока

Для решения системы уравнений (неравенств) используется символьный блок, который имеет следующую структуру:

1. Начальные условия, заданные с помощью знака локального присваивания.
2. Встроенная функция **Given**, которая открывает блок решений.
3. Последовательность уравнений, заданных с применением логического знака равенства.
4. Определение ограничений, которые накладываются на искомые переменные.
5. Выражение, которое использует встроенные функции поиска решений (**find** и **minner**). После ввода встроенной функции в скобках, отделяя запятой, указывают имена искомых переменных.

Например:

Given

$$-I_1 - I_2 + I_6 = 0$$

$$I_1 + I_3 - I_5 = 0$$

$$-I_3 + I_4 - I_6 = 0$$

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_5 \cdot R_5 = E_1 - E_2$$

$$-I_3 \cdot R_3 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5 = 0$$

$$I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 + I_6 \cdot R_6 = E_2$$

$$\text{Find}(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6) \rightarrow \begin{pmatrix} 9231 \\ \hline 8777 \\ 4910 \\ \hline 8777 \\ -7587 \\ \hline 8777 \\ 6554 \\ \hline 8777 \\ 1644 \\ \hline 8777 \\ 14141 \\ \hline 8777 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 0.559 \\ -0.864 \\ 0.747 \\ 0.187 \\ 1.611 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  A;  $I_2=0.559$  A;  $I_3=-0.864$  A;  $I_4=0.747$  A;  $I_5=0.187$  A;  $I_6=1.611$  A.



## Применение матричного уравнения

Так как систему уравнений можно задать в матричной форме  $\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{V}$ , то решение системы будет записываться в виде  $\mathbf{X} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{M}^{-1}$ -обратная матрица к матрице  $\mathbf{M}$ ;

$\mathbf{M}$ -матрица коэффициентов, которая не должна быть вырожденной;

$\mathbf{V}$ - вектор свободных членов.

Этот способ не применим, если определитель матрицы коэффициентов равен 0 (вырожденный случай).

Например:

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ R1 & -R2 & 0 & 0 & R5 & 0 \\ 0 & 0 & -R3 & -R4 & -R5 & 0 \\ 0 & R2 & 0 & R4 & 0 & R6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{V} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\mathbf{I} := \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{V}$$
$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1.052 \\ 0.559 \\ -0.864 \\ 0.747 \\ 0.187 \\ 1.611 \end{pmatrix}$$

Результат вычислений:  $I_1=1.052$  A;  $I_2=0.559$  A;  $I_3=-0.864$  A;  $I_4=0.747$  A;  $I_5=0.187$  A;  $I_6=1.611$  A.

### 1.3.2 Решение типовых задач

#### Задача 1.2.1

Рассмотрим задачу 1.2.1 пункта 1.2.12 (рисунок 40).

**Решение**

Исходные данные

$$E1 := 200 \quad J := 2.8 \quad E2 := 140 \quad R01 := 1 \\ R02 := 0.5 \quad R1 := 9 \quad R2 := 9.5 \quad R3 := 5$$

Расчетная формула для определения узлового напряжения

$$U_{ab} := \frac{E1 \cdot \frac{1}{R1 + R01} - E2 \cdot \frac{1}{R02 + R2} + J}{\frac{1}{R1 + R01} + \frac{1}{R02 + R2} + \frac{1}{R3}}$$

$$U_{ab} = 22$$

Расчетные формулы для определения токов в ветвях

$$I1 := (E1 - U_{ab}) \cdot \frac{1}{R01 + R1} \\ I2 := (-E2 - U_{ab}) \cdot \frac{1}{R02 + R2} \\ I3 := (0 - U_{ab}) \cdot \frac{1}{R3}$$

$$I1 = 17.8$$

$$I2 = -16.2$$

$$I3 = -4.4$$

Проверка по первому закону Кирхгофа

$$I2 + I3 + I1 + J = 0$$

### Задача 1.2.2

Рассмотрим задачу 1.2.1 пункта 1.2.12 (рисунок 41).

**Решение**

### Метод узловых и контурных уравнений

Исходные данные

$$R1 := 200 \quad R21 := 100 \quad R22 := 200 \\ R3 := 125 \quad R4 := 125 \quad R5 := 50 \\ R6 := 60 \quad E3 := 15 \quad E6 := 30 \\ J4 := 1$$

Матрица коэффициентов и вектор свободных членов

$$M := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -200 & 300 & -125 & 0 & 0 & 0 \\ 200 & 0 & 0 & 125 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 125 & 0 & -50 & 60 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Матричное уравнение для определения токов

$$I := M^{-1} \cdot V$$

Результаты расчетов токов в ветвях

$$I = \begin{pmatrix} 0.285 \\ 0.222 \\ 0.196 \\ -0.493 \\ 0.09 \\ 0.417 \end{pmatrix}$$

Токи в ветвях

$$\begin{aligned} I_1 &:= I_{0,0} & I_2 &:= I_{1,0} & I_3 &:= I_{2,0} \\ I_4 &:= I_{3,0} & I_5 &:= I_{4,0} & I_6 &:= I_{5,0} \\ I_1 &= 0.285 & I_2 &= 0.222 \\ I_3 &= 0.196 & I_4 &= -0.493 \\ I_5 &= 0.09 & I_6 &= 0.417 \end{aligned}$$

Баланс мощностей

$$\begin{aligned} P_i &:= E_3 \cdot I_3 + E_6 \cdot I_6 + (-I_4 \cdot J_4 \cdot R_4) \\ P_i &= 77.045 \\ P_p &:= I_1^2 \cdot R_1 + I_2^2 \cdot (R_{21} + R_{22}) + I_3^2 \cdot R_3 + I_5^2 \cdot R_5 + I_6^2 \cdot R_6 + I_4^2 \cdot R_4 \\ P_p &= 77.045 \end{aligned}$$

## Метод контурных токов

Исходные данные

$$\begin{aligned} R_1 &:= 200 & R_{21} &:= 100 & R_{22} &:= 200 \\ R_3 &:= 125 & R_4 &:= 125 & R_5 &:= 50 \end{aligned}$$

$$R6 := 60 \quad E3 := 15 \quad E6 := 30 \\ J4 := 1$$

Матрица коэффициентов и вектор свободных членов

$$M := \begin{pmatrix} 625 & -200 & -125 \\ -200 & 375 & -50 \\ -125 & -50 & 235 \end{pmatrix} \quad V := \begin{pmatrix} -15 \\ 125 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Матричное уравнение для определения токов

$$I := M^{-1} \cdot V$$

Результаты расчетов контурных токов

$$I = \begin{pmatrix} 0.222 \\ 0.507 \\ 0.417 \end{pmatrix}$$

$$I_{11} := I_{0,0} \quad I_{22} := I_{1,0} \\ I_{33} := I_{2,0} \quad I_{44} := J4 \\ I_{11} = 0.222 \quad I_{22} = 0.507 \\ I_{33} = 0.417 \quad I_{44} = 1$$

Действительные токи в ветвях

$$I_1 := I_{22} - I_{11} \quad I_2 := I_{11} \\ I_3 := I_{33} - I_{11} \quad I_4 := I_{44} - I_{22} \\ I_5 := I_{22} - I_{33} \quad I_6 := I_{33} \\ I_1 = 0.285 \quad I_2 = 0.222 \\ I_3 = 0.196 \quad I_4 = 0.493 \\ I_5 = 0.09 \quad I_6 = 0.417$$

## Метод узловых потенциалов

Исходные данные

$$R1 := 200 \quad R21 := 100 \quad R22 := 200 \\ R3 := 125 \quad R4 := 125 \quad R5 := 50 \\ R6 := 60 \quad E3 := 15 \quad E6 := 30 \\ J4 := 1$$

Расчетные формулы для определения собственных проводимостей

$$G_{11} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_4}$$

$$G_{22} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}$$

$$G_{33} := \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{21} + R_{22}} + \frac{1}{R_6}$$

Значения собственных проводимостей

$$G_{11} = 0.016$$

$$G_{22} = 0.033$$

$$G_{33} = 0.028$$

Расчетные формулы для определения взаимных проводимостей

$$G_{12} := \frac{1}{R_1} \quad G_{21} := G_{12}$$

$$G_{13} := \frac{1}{R_{21} + R_{22}} \quad G_{31} := G_{13}$$

$$G_{32} := \frac{1}{R_3} \quad G_{23} := G_{32}$$

Значения взаимных проводимостей

$$G_{12} = 5 \times 10^{-3}$$

$$G_{13} = 3.333 \times 10^{-3}$$

$$G_{32} = 8 \times 10^{-3}$$

Расчетные формулы для определения узловых токов

$$J_{11} := J_4$$

$$J_{22} := \frac{-E_3}{R_3}$$

$$J_{33} := \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_6}{R_6}$$

Значения узловых токов

$$\begin{aligned}J_{11} &= 1 \\J_{22} &= -0.12 \\I_{33} &= 0.417\end{aligned}$$

Расчетные формулы для определения узловых потенциалов

Given

$$\begin{aligned}G_{11} \cdot U_{10} - G_{12} \cdot U_{20} - G_{13} \cdot U_{30} &= J_{11} \\-G_{21} \cdot U_{10} + G_{22} \cdot U_{20} - G_{23} \cdot U_{30} &= J_{22} \\-G_{31} \cdot U_{10} - G_{32} \cdot U_{20} + G_{33} \cdot U_{30} &= J_{33}\end{aligned}$$

$$U := \text{Find}(U_{10}, U_{20}, U_{30}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{117450}{1907} \\ \frac{8570}{1907} \\ \frac{-9450}{1907} \end{pmatrix}$$

Значения потенциалов в узлах

$$\begin{aligned}U_{10} &:= U_{0,0} \\U_{20} &:= U_{1,0} \\U_{30} &:= U_{2,0} \\U_{10} &= 61.589 \\U_{20} &= 4.494 \\U_{30} &= -4.955\end{aligned}$$

Токи в ветвях

$$\begin{aligned}I_1 &:= \frac{U_{10} - U_{20}}{R_1} \\I_2 &:= \frac{U_{10} - U_{30}}{R_{21} + R_{22}} \\I_3 &:= \frac{E_3 - (U_{30} - U_{20})}{R_3} \\I_4 &:= \frac{U_{10} - 0}{R_4} \\I_5 &:= \frac{U_{20} - 0}{R_5} \\I_6 &:= \frac{E_6 - (0 - U_{30})}{R_6}\end{aligned}$$

$$I_1 = 0.285 \quad I_2 = 0.222 \quad I_3 = 0.196$$

$$I_4 = 0.493 \quad I_5 = 0.09 \quad I_6 = 0.417$$

Результаты расчетов совпадают.

## **2. Электрические цепи однофазного синусоидального тока**

### **2.1 Общие теоретические сведения**

Переменный ток долгое время не находил практического применения. Это было связано с тем, что первые генераторы электрической энергии вырабатывали постоянный ток, который вполне удовлетворял технологическим процессам электрохимии, а двигатели постоянного тока обладают хорошими регулировочными характеристиками. Однако по мере развития производства постоянный ток все менее стал удовлетворять возрастающим требованиям экономичного электроснабжения.

Переменный ток дал возможность эффективного дробления электрической энергии и изменения величины напряжения с помощью трансформаторов. Появилась возможность производства электроэнергии на крупных электростанциях с последующим экономичным ее распределением потребителям, увеличился радиус электроснабжения.

В настоящее время центральное производство и распределение электрической энергии осуществляется в основном на переменном токе. Цепи с изменяющимися – переменными – токами по сравнению с цепями постоянного тока имеют ряд особенностей. Переменные токи и напряжения вызывают переменные электрические и магнитные поля. В результате изменения этих полей в цепях возникают явления самоиндукции и взаимной индукции, которые оказывают самое существенное влияние на процессы, протекающие в цепях, усложняя их анализ.

Переменным током (напряжением, ЭДС и т.д.) называется ток (напряжение, ЭДС и т.д.), изменяющийся во времени. Токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени в одной и той же последовательности, называются периодическими, а наименьший промежуток времени, через который эти повторения наблюдаются, – периодом  $T$ . Для периодического тока имеем

$$i = F(t) = F(t + T), \quad (2.1)$$

Величина, обратная периоду, есть частота, измеряемая в герцах (Гц):

$$f = 1/T, \quad (2.2)$$

Диапазон частот, применяемых в технике: от сверхнизких частот (0.01, 10 Гц – в системах автоматического регулирования, в аналоговой

вычислительной технике) – до сверхвысоких (3000 , 300000 МГц – миллиметровые волны: радиолокация, радиоастрономия). В Казахстане промышленная частота  $f = 50$  Гц.

Мгновенное значение переменной величины есть функция времени. Ее принято обозначать строчной буквой:

$i$  - мгновенное значение тока  $i(t)$ ;

$u$  – мгновенное значение напряжения  $u(t)$ ;

$e$  - мгновенное значение ЭДС  $e(t)$ ;

$p$  - мгновенное значение мощности  $p(t)$ .

Наибольшее мгновенное значение переменной величины за период называется амплитудой (ее принято обозначать заглавной буквой с индексом  $m$ ).

$I_m$  - амплитуда тока;

$U_m$  - амплитуда напряжения;

$E_m$  - амплитуда ЭДС.

### Действующее значение переменного тока

Значение периодического тока, равное такому значению постоянного тока, который за время одного периода произведет тот же самый тепловой или электродинамический эффект, что и периодический ток, называют действующим значением периодического тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} , \quad (2.3)$$

Аналогично определяют действующие значения ЭДС и напряжения.

### Синусоидально изменяющийся ток

Из всех возможных форм периодических токов наибольшее распространение получил синусоидальный ток. По сравнению с другими видами тока синусоидальный ток имеет то преимущество, что позволяет в общем случае наиболее экономично осуществлять производство, передачу, распределение и использование электрической энергии. Только при использовании синусоидального тока удастся сохранить неизменными формы кривых напряжений и токов на всех участках сложной линейной цепи. Теория синусоидального тока является ключом к пониманию теории других цепей.



### 2.1.1 Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов на плоскости декартовых координат

Синусоидальные токи и напряжения можно изобразить графически, записать при помощи уравнений с тригонометрическими функциями, представить в виде векторов на декартовой плоскости или комплексными числами.

Приведенным на рисунке 45, графикам двух синусоидальных ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  соответствуют уравнения:

$$e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \Psi_{e1}); \quad e_2 = E_{2m} \sin(\omega t + \Psi_{e2}).$$

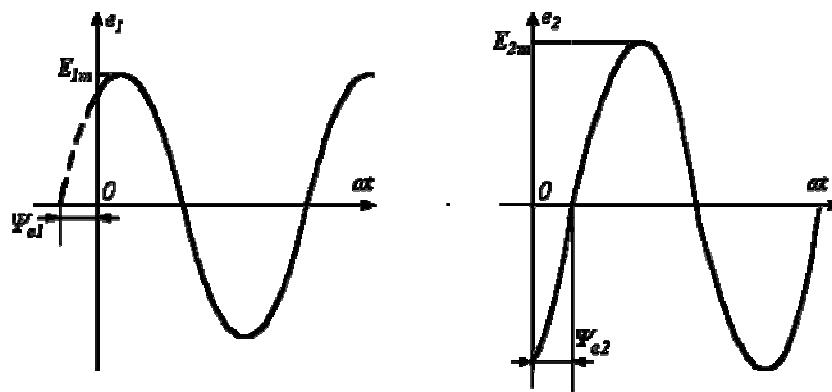


Рисунок 45 – Графики синусоидальной ЭДС  $e_1$  и  $e_2$

Значения аргументов синусоидальных функций  $(\omega t + \Psi_{e1})$  и  $(\omega t + \Psi_{e2})$  называются фазами синусоид, а значение фазы в начальный момент времени ( $t=0$ ):  $\Psi_{e1}$  и  $\Psi_{e2}$  – начальной фазой ( $\Psi_{e1} > 0$ ;  $\Psi_{e2} < 0$ ).

Величину  $\omega$ , характеризующую скорость изменения фазового угла, называют угловой частотой. Так как фазовый угол синусоиды за время одного периода  $T$  изменяется на  $2\pi$  рад, то угловая частота есть

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad (2.4)$$

где  $f$  – частота.

При совместном рассмотрении двух синусоидальных величин одной частоты разность их фазовых углов, равную разности начальных фаз, называют углом сдвига фаз.

Для синусоидальных ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  угол сдвига фаз:

$$\alpha = (\omega t + \Psi_{e1}) - (\omega t + \Psi_{e2}) = \Psi_{e1} - \Psi_{e2}.$$

### 2.1.2 Векторное изображение синусоидально изменяющихся величин

На декартовой плоскости из начала координат проводят векторы, равные по модулю амплитудным значениям синусоидальных величин, и вращают эти векторы против часовой стрелки (в ТОЭ данное направление принято за положительное) с угловой частотой, равной  $\omega$ . Фазовый угол при вращении отсчитывается от положительной полуоси абсцисс. Проекции вращающихся векторов на ось ординат равны мгновенным значениям ЭДС  $e_1$  и  $e_2$  (рисунок 46 а). Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называют векторными диаграммами. При построении векторных диаграмм векторы удобно располагать для начального момента времени ( $t=0$ ), что вытекает из равенства угловых частот синусоидальных величин и эквивалентно тому, что система декартовых координат сама вращается против часовой стрелки со скоростью  $\omega$ .

Таким образом, в этой системе координат векторы неподжны (рисунок 46 б). Векторные диаграммы нашли широкое применение при анализе цепей синусоидального тока. Их применение делает расчет цепи более наглядным и простым. Это упрощение заключается в том, что сложение и вычитание мгновенных значений величин можно заменить сложением и вычитанием соответствующих векторов.

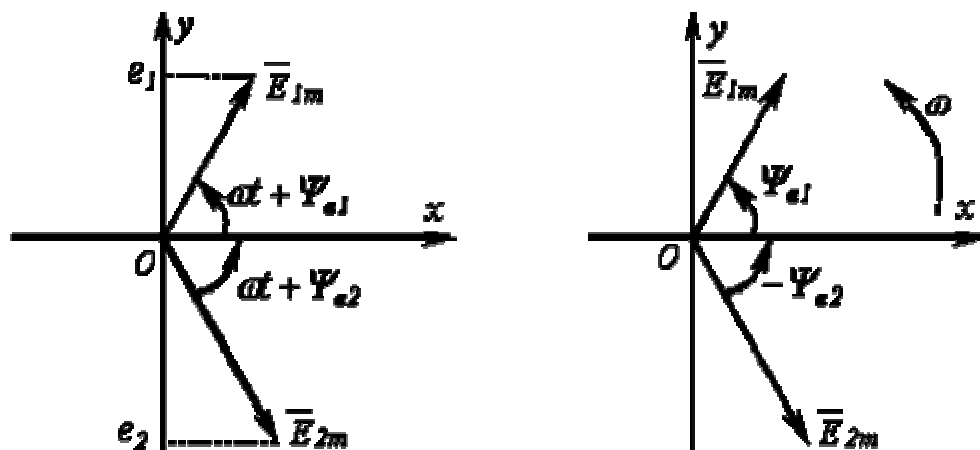


Рисунок 46 – Векторные диаграммы:

Пусть, например, в точке разветвления цепи (рисунок 47,а) общий ток  $i_3$  равен сумме токов  $i_1$  и  $i_2$  двух ветвей:

$$i_3 = i_1 + i_2.$$

Каждый из этих токов синусоидален и может быть представлен уравнением

$$i_1 = I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) \quad \text{и} \quad i_2 = I_{2m} \sin(\omega t + \Psi_2).$$

Результирующий ток также будет синусоидален:

$$i_3 = I_{1m} \sin(\omega t + \Psi_1) + I_{2m} \sin(\omega t + \Psi_2) = I_{3m} \sin(\omega t + \Psi_3).$$

Определение амплитуды  $I_{3m}$  и начальной фазы  $\Psi_3$  этого тока путем соответствующих тригонометрических преобразований получается довольно громоздким и мало наглядным, особенно, если суммируется большое число синусоидальных величин. Значительно проще это осуществляется с помощью векторной диаграммы. На рисунке 47,б изображены начальные положения векторов токов, проекции которых на ось ординат дают мгновенные значения токов для  $t=0$ . При вращении этих векторов с одинаковой угловой скоростью  $\omega$  их взаимное расположение не меняется, и угол сдвига фаз между ними остается равным  $\alpha = \Psi_1 - \Psi_2$ .

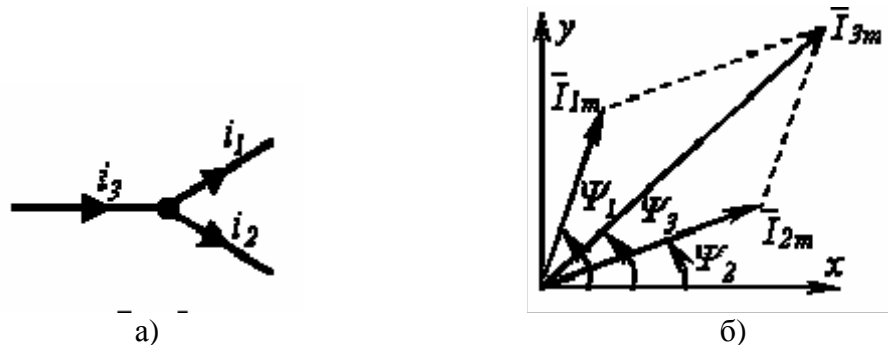


Рисунок 47 – Векторные диаграммы:

Так как алгебраическая сумма проекций векторов на ось ординат равна мгновенному значению общего тока, вектор общего тока равен геометрической сумме векторов токов:

$$\vec{I}_{3m} = \vec{I}_{1m} + \vec{I}_{2m}.$$

Построение векторной диаграммы в масштабе позволяет определить значения  $I_{\beta m}$  и  $\Psi_{\beta}$  из диаграммы, после чего может быть записано решение для мгновенного значения  $i_{\beta}$  путем формального учета угловой частоты:

$$i_{\beta} = I_{\beta m} \sin(\omega t + \Psi_{\beta}).$$

### 2.1.3 Представление синусоидальных ЭДС, напряжений и токов комплексными числами

Геометрические операции с векторами можно заменить алгебраическими операциями с комплексными числами, что существенно повышает точность получаемых результатов.

Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое может быть записано в:

показательной  $\dot{a} = a e^{j\Psi}$ ,

тригонометрической  $\dot{a} = a \cos \Psi + ja \sin \Psi$  или

алгебраической  $\dot{a} = b + jc$  - формах.

Например, ЭДС  $e = E_m \sin(\omega t + \Psi_e)$ , изображенной на рисунке 48 вращающимся вектором, соответствует комплексное число

$$E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)} = E_m \cos(\omega t + \Psi_e) + j E_m \sin(\omega t + \Psi_e) = e' + je.$$

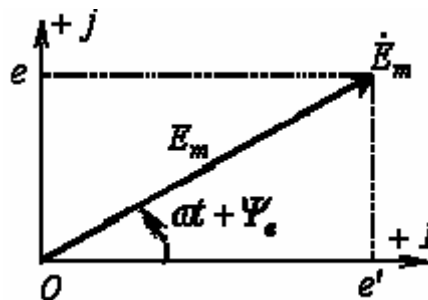


Рисунок 48 – Вектор синусоидальной ЭДС

Фазовый угол  $(\omega t + \Psi_e)$  определяется по проекциям вектора на оси “+1” и “+j” системы координат, как

$$\operatorname{tg}(\omega t + \Psi_e) = \frac{e}{e'}.$$

В соответствии с тригонометрической формой записи мнимая составляющая комплексного числа определяет мгновенное значение синусоидально изменяющейся ЭДС:

$$e = E_m \sin(\omega t + \Psi_e) = I_m \{ E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)} \}, \quad (2.5)$$

Комплексное число  $E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)}$  удобно представить в виде произведения двух комплексных чисел:

$$E_m e^{j(\omega t + \Psi_e)} = \underbrace{E_m e^{j\Psi_e}}_{\dot{E}_m} \cdot e^{j\omega t} = \dot{E}_m e^{j\omega t} \quad (2.6)$$

Параметр  $\dot{E}_m$ , соответствующий положению вектора для  $t=0$  (или на вращающейся со скоростью  $\omega$  комплексной плоскости), называют комплексной амплитудой:  $\dot{E}_m = E_m e^{j\Psi_e}$ , а параметр  $\dot{E}_m e^{j(\omega t + \Psi_e)}$  - комплексом мгновенного значения.

Параметр  $e^{j\omega t}$  является оператором поворота вектора на угол  $\omega t$  относительно начального положения вектора.

Вообще говоря, умножение вектора на оператор поворота  $e^{\pm j\alpha}$  есть его поворот относительно первоначального положения на угол  $\pm\alpha$ .

Следовательно, мгновенное значение синусоидальной величины равно мнимой части без знака “ $j$ ” произведения комплекса амплитуды  $\dot{E}_m$  и оператора поворота  $e^{j\omega t}$ :

$$e = E_m \sin(\omega t + \Psi_e) = I_m \{ \dot{E}_m e^{j\omega t} \}.$$

Переход от одной формы записи синусоидальной величины к другой осуществляется с помощью формулы Эйлера:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (2.7)$$

Если, например, комплексная амплитуда напряжения задана в виде комплексного числа в алгебраической форме:

$$\dot{U}_m = U'_m + jU''_m,$$

- то для записи ее в показательной форме, необходимо найти начальную фазу  $\Psi_U$ , т.е. угол, который образует вектор  $\bar{U}_m$  с положительной полуосью +1:

$$\operatorname{tg} \Psi_U = \frac{U''_m}{U'_m}.$$

Тогда мгновенное значение напряжения:

$$U = I_m \left\{ \dot{U}_m e^{j\omega t} \right\} = I_m \left\{ \sqrt{U'^2_m + U''^2_m} e^{j \operatorname{arctg} \frac{U''_m}{U'_m}} e^{j\omega t} \right\} = U_m \sin(\omega t + \Psi_U),$$

где  $\Psi_U = \operatorname{arctg}(U''_m / U'_m)$ .

При записи выражения для определенности было принято, что  $U'_m > 0$ , т.е. что изображающий вектор находится в первом или четвертом квадрантах. Если  $U'_m < 0$ , то при  $U''_m > 0$  (второй квадрант)

$$\Psi_U = \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{U''_m}{U'_m} \right|, \quad (2.8)$$

а при  $U''_m < 0$  (третий квадрант)

$$\Psi_U = \pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{U''_m}{U'_m} \right| \quad (2.9)$$

или

$$\Psi_U = -\pi + \operatorname{arctg} \left| \frac{U''_m}{U'_m} \right| \quad (2.10)$$

Если задано мгновенное значение тока в виде  $i = I_m \sin(\omega t + \Psi_i)$ , то комплексную амплитуду записывают сначала в показательной форме, а затем (при необходимости) по формуле Эйлера переходят к алгебраической форме:

$$\dot{I}_m = I_m e^{j\Psi_i} = I_m \cos \Psi_i + j I_m \sin \Psi_i = I'_m + j I''_m.$$

Следует указать, что при сложении и вычитании комплексных следует пользоваться алгебраической формой их записи, а при умножении и делении удобна показательная форма.

Итак, применение комплексных чисел позволяет перейти от геометрических операций над векторами к алгебраическим над комплексами.

Так при определении комплексной амплитуды результирующего тока  $\dot{i}_3$  по рисунку 47а получим:

$$\begin{aligned}\dot{i}_3 &= \dot{i}_1 + \dot{i}_2 = I_{1m}e^{j\Psi_1} + I_{2m}e^{j\Psi_2} = I_{1m}(\cos\Psi_1 + j\sin\Psi_1) + I_{2m}(\cos\Psi_2 + j\sin\Psi_2) = \\ &= (I_{1m}\cos\Psi_1 + I_{2m}\cos\Psi_2) + j(I_{1m}\sin\Psi_1 + I_{2m}\sin\Psi_2) = I_3\cos\Psi_3 + jI_3\sin\Psi_3 = \\ &= I_3e^{j\Psi_3},\end{aligned}$$

$$\text{где } I_3 = \sqrt{(I_{1m}\cos\Psi_1 + I_{2m}\cos\Psi_2)^2 + (I_{1m}\sin\Psi_1 + I_{2m}\sin\Psi_2)^2};$$

$$\operatorname{tg}\Psi_3 = \frac{I_{1m}\sin\Psi_1 + I_{2m}\sin\Psi_2}{I_{1m}\cos\Psi_1 + I_{2m}\cos\Psi_2}.$$

Действующее значение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов в соответствии с выражением (2.4) для действующего значения синусоидального тока запишем:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{I_m^2 \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} \cdot T} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Аналогичный результат можно получить для синусоидальных ЭДС и напряжений. Таким образом, действующие значения синусоидальных тока, ЭДС и напряжения меньше своих амплитудных значений в  $\sqrt{2}$  раз:

$$X = \frac{X_m}{\sqrt{2}}. \quad (2.11)$$

Поскольку, как будет показано далее, энергетический расчет цепей переменного тока обычно проводится с использованием действующих значений величин, по аналогии с предыдущим введем понятие комплекса действующего значения

$$\dot{E} = E e^{j\Psi_e} = \frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} e^{j\Psi_e}.$$

## Контрольные вопросы

1. Какой практический смысл имеет изображение синусоидальных величин с помощью векторов?
2. Какой практический смысл имеет представление синусоидальных величин с использованием комплексных чисел?
3. В чем заключаются преимущества изображения синусоидальных величин с помощью комплексов по сравнению с их векторным представлением?

### 2.1.4 Элементы цепи синусоидального тока. Векторные диаграммы и комплексные соотношения для них

#### Резистор

Идеальный резистивный элемент не обладает ни индуктивностью, ни емкостью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$  (см. рисунок 49), то ток  $I$  через него будет равен

$$i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \Psi) = I_m \sin(\omega t + \Psi) \quad (2.12)$$

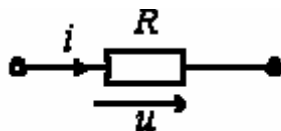


Рисунок 49 – Резистор

Соотношение (2.12) показывает, что ток имеет ту же начальную фазу, что и напряжение. Таким образом, если на входе двухлучевого осциллографа подать сигналы  $u$  и  $i$ , то соответствующие им синусоиды на его экране будут проходить (см. рисунок 50а) через нуль одновременно, т.е. **на резисторе напряжение и ток совпадают по фазе.**

Из (2.12) вытекает:

$$U_m = RI_m;$$



$$U = RI.$$

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = I e^{j\Psi},$$

- разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\Psi}} = \frac{U}{I} = R$$

или

$$\dot{U} = R \dot{I}. \quad (2.13)$$

Полученный результат показывает, что отношение двух комплексов есть вещественная константа. Следовательно, соответствующие им векторы напряжения и тока (см. рисунок 50б) совпадают по направлению.

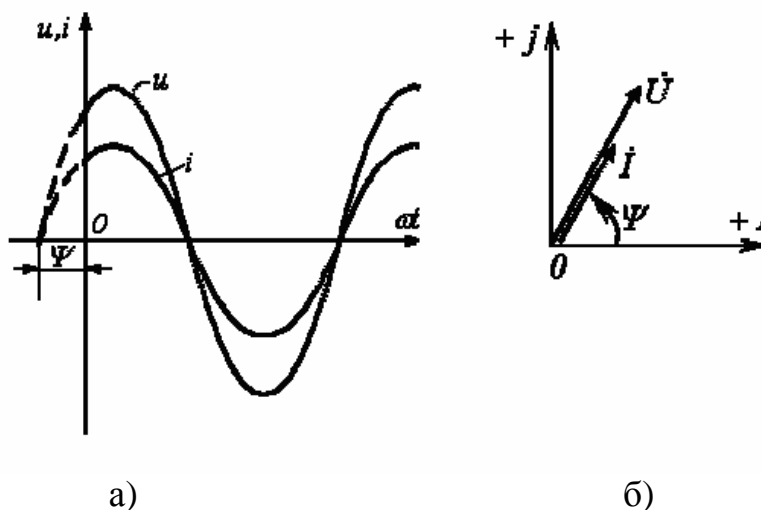


Рисунок 50 – Диаграммы тока и напряжения на резисторе

## Конденсатор

Идеальный емкостный элемент не обладает ни активным сопротивлением (проводимостью), ни индуктивностью. Если к нему приложить синусоидальное напряжение  $u = U_m \sin(\omega t + \Psi)$  (см. рисунок 51), то ток  $i$  через него будет равен

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu) = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (2.14)$$

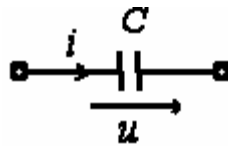


Рисунок 51 – Конденсатор

Полученный результат показывает, что **напряжение на конденсаторе отстает по фазе от тока на  $\pi/2$** . Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы  $u$  и  $i$ , то на его экране будет иметь место картинка, соответствующая рисунку 52.

Из (2.14) вытекает:

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m;$$

$$U = \frac{1}{\omega C} I = X_C I.$$

Введенный параметр  $X_C = 1/(\omega C)$  называют **реактивным емкостным сопротивлением конденсатора**. Как и резистивное сопротивление,  $X_C$  имеет размерность **Ом**. Однако в отличие от  $R$  данный параметр является функцией частоты, что иллюстрирует рисунок 52б. Из рисунка 52б вытекает, что при  $f = 0$  конденсатор представляет разрыв для тока, а при  $f \rightarrow \infty$   $X_C = 0$ .

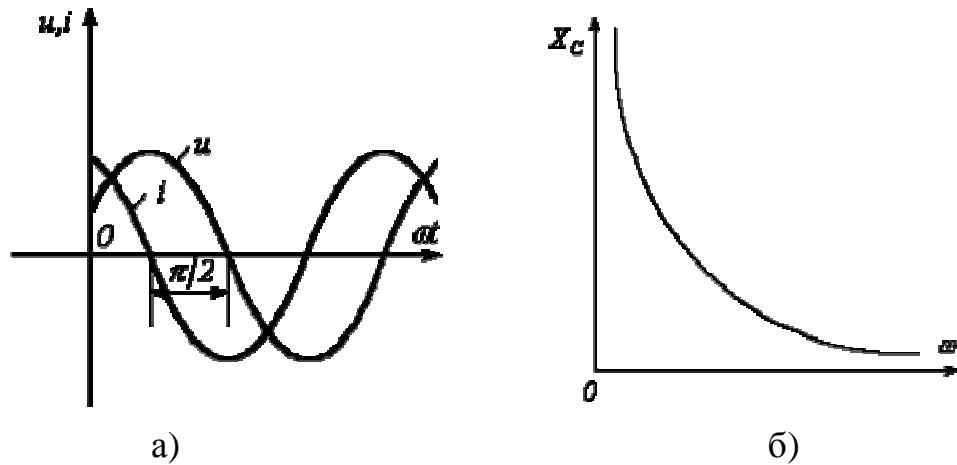


Рисунок 52 – Диаграммы тока и напряжения на конденсаторе

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим им комплексам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\Psi};$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{I} = I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

- разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{U e^{j\Psi}}{I e^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}} = X_C e^{-j\frac{\pi}{2}} = -jX_C = \underline{Z}_C$$

или

$$\dot{U} = -jX_C \dot{I} = \underline{Z}_C \dot{I}. \quad (2.15)$$

В последнем соотношении  $\underline{Z}_C = -jX_C$  - комплексное сопротивление

конденсатора. Умножение на  $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$  соответствует повороту вектора на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке. Следовательно, уравнению (2.14) соответствует векторная диаграмма, представленная на рисунке 53.

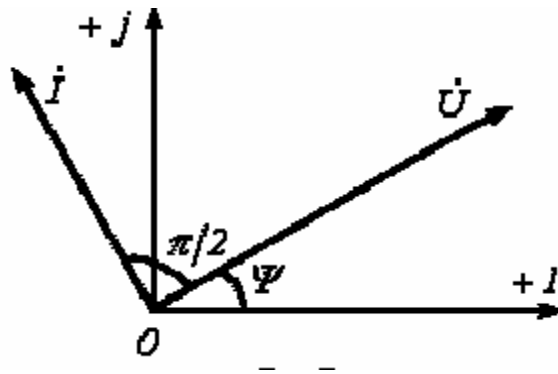


Рисунок 53 – Векторная диаграмма напряжения и тока на конденсаторе

### Катушка индуктивности

Идеальный индуктивный элемент не обладает ни активным сопротивлением, ни емкостью. Пусть протекающий через него ток (см. рисунок 54) определяется выражением  $i = I_m \sin(\omega t + \Psi)$ . Тогда для напряжения на зажимах катушки индуктивности можно записать

$$u = -e = \frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.16)$$

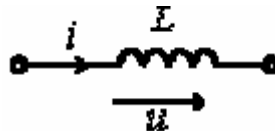


Рисунок 54- Катушка индуктивности

Полученный результат показывает, что **напряжение на катушке индуктивности опережает по фазе ток на  $\pi/2$** .

Таким образом, если на входы двухлучевого осциллографа подать сигналы  $u$  и  $i$ , то на его экране (идеальный индуктивный элемент) будет иметь место картинка, соответствующая рисунку 55,а.

Из (2.16) вытекает:

$$\begin{aligned} U_m &= \omega L I_m = X_L I_m; \\ U &= \omega L I = X_L I. \end{aligned}$$

Введенный параметр  $X_L = \omega L$  называют **реактивным индуктивным сопротивлением катушки**; его размерность – Ом. Как и у емкостного элемента, этот параметр является функцией частоты. Однако в данном случае эта зависимость имеет линейный характер, что иллюстрирует рисунок 55б. Из рисунка 55,б вытекает, что при  $f = 0$  катушка индуктивности не оказывает сопротивления протекающему через него току, и при  $f \rightarrow \infty$   $X_L \rightarrow \infty$ .

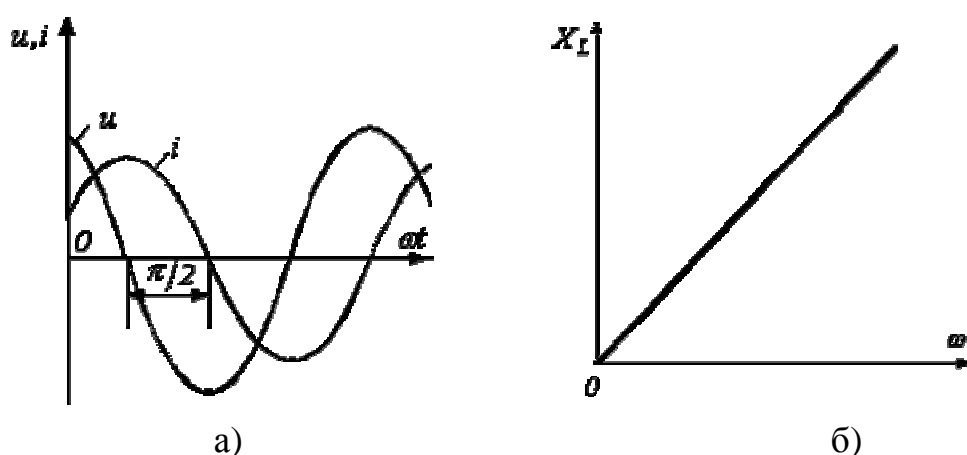


Рисунок 55 – Диаграммы тока и напряжения на индуктивности

Переходя от синусоидальных функций напряжения и тока к соответствующим комплексам:

$$u = U_m \sin\left(\omega t + \Psi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{U} = U e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)} ;$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \Psi) \Rightarrow \dot{I} = I e^{j\Psi} ,$$

разделим первый из них на второй:

$$\frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U e^{j\left(\Psi + \frac{\pi}{2}\right)}}{I e^{j\Psi}} = \frac{U e^{j\Psi} e^{j\frac{\pi}{2}}}{I e^{j\Psi}} = X_L e^{j\frac{\pi}{2}} = jX_L = \underline{Z}_L$$

или

$$\dot{U} = jX_L \dot{I} = \underline{Z}_L \dot{I} \quad (2.17)$$

В полученном соотношении  $\underline{Z}_L = jX_L$  - комплексное

сопротивление катушки индуктивности. Умножение на  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  соответствует повороту вектора на угол  $\pi/2$  против часовой стрелки. Следовательно, уравнению (2.17) соответствует векторная диаграмма, представленная на рисунке 56.

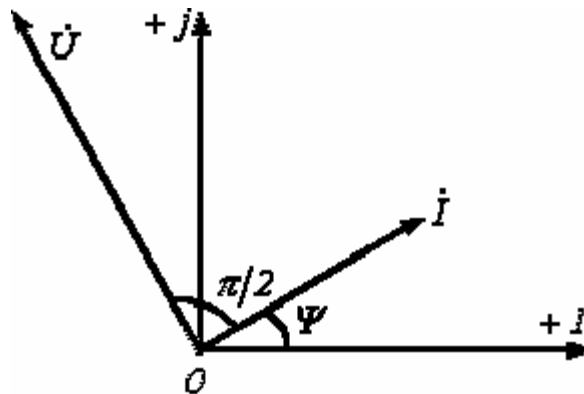


Рисунок 56 - Векторная диаграмма напряжения и тока на катушке индуктивности

### Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Пусть в ветви на рисунке 56  $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

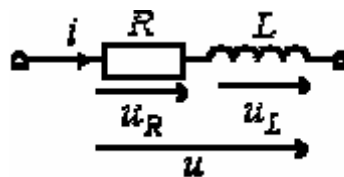


Рисунок 56- Последовательное соединение резистивного и индуктивного элементов

Тогда

$$\begin{aligned}
 u &= u_R + u_L = RI_m \sin(\omega t + \varphi) + \omega LI_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\
 &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \arctg \frac{\omega L}{R}\right) = \\
 &= U_m \sin(\omega t + \varphi + \Psi),
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

где

$$U_m = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} I_m = ZI_m; \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; \quad \Psi = \arctg \frac{\omega L}{R},$$

причем пределы изменения  $\Psi: 0 < \Psi < \frac{\pi}{2}$ .

Уравнению (2.18) можно поставить в соответствие соотношение

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L = R\dot{I} + jX_L\dot{I} = (R + jX_L)\dot{I} = \underline{Z}\dot{I},$$

которому, в свою очередь, соответствует векторная диаграмма на рисунке 57а. Векторы на рисунке 57а образуют фигуру, называемую **треугольником напряжений**.

Аналогично выражение

$$\underline{Z} = R + jX_L = \sqrt{R^2 + X_L^2} e^{j\Psi} = Ze^{j\Psi}$$

графически может быть представлено **треугольником сопротивлений** (см. рисунок 57б), который подобен треугольнику напряжений.

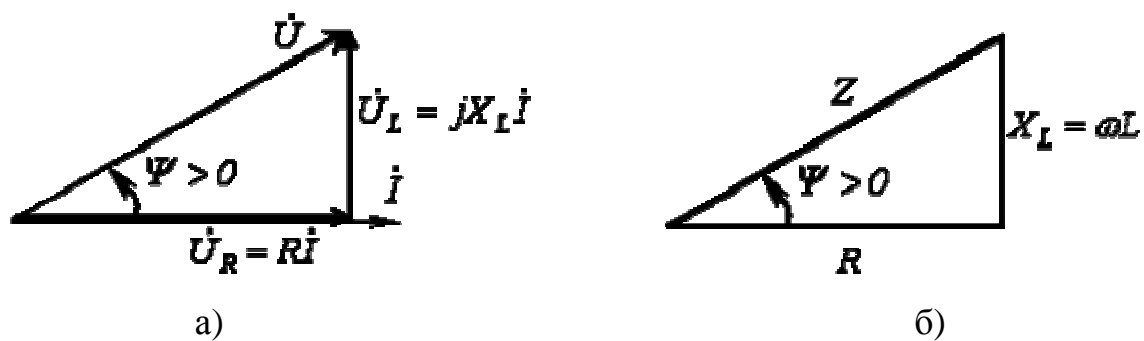


Рисунок 57 – Треугольники напряжений и сопротивлений

### Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов

Опуская промежуточные выкладки, с использованием соотношений (2.13) и (2.15) для ветви на рисунке 58 можно записать

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_C = RI - jX_C \dot{I} = (R - jX_C) \dot{I} = \underline{Z} \dot{I}, \quad (2.19)$$

где

$$\underline{Z} = R - jX_C = \sqrt{R^2 + X_C^2} e^{j\Psi} = \underline{Z} e^{j\Psi}; \Psi = -\arctg \frac{X_C}{R} = -\arctg \frac{1}{\omega CR},$$

причем пределы изменения  $\Psi : -\frac{\pi}{2} < \Psi < 0$ .

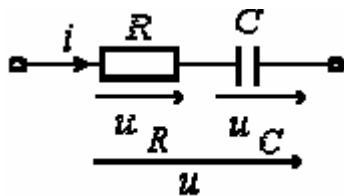


Рисунок 58 - Последовательное соединение резистивного и емкостного элементов



На основании уравнения (2.18) могут быть построены треугольники напряжений (см. рисунок 59а) и сопротивлений (см. рисунок 59б), которые являются подобными.

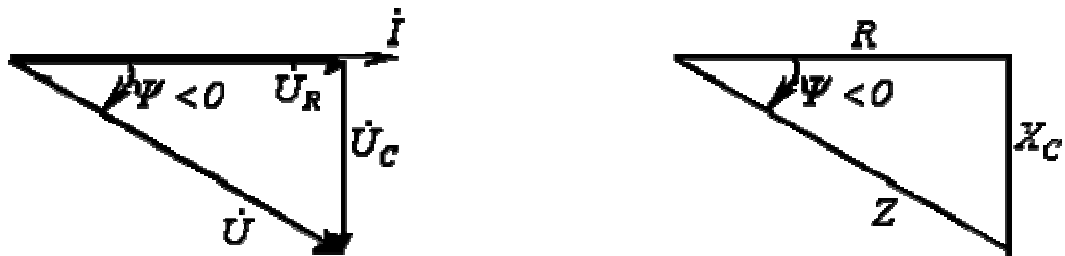


Рисунок 59 –Треугольники напряжений и сопротивлений

### Параллельное соединение резистивного и емкостного элементов

Для цепи на рисунке 60 имеют место соотношения:

$$U = U_R = U_C ;$$

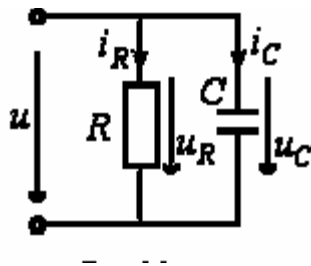


Рисунок 60 - Параллельное соединение резистивного  
и емкостного элементов

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU ,$$

где  $g = \frac{1}{R}$  [См] – активная проводимость;

$$I_C = \frac{U_C}{X_C} = b_C U,$$

где  $b_C = \frac{1}{X_C}$  [См] – реактивная проводимость конденсатора.

Векторная диаграмма токов для данной цепи, называемая **треугольником токов**, приведена на рисунке 61а. Ей соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C = g\dot{U} + jb_C\dot{U} = (g + jb_C)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi},$$

где  $I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2}$ ;

$$\underline{Y} = g + jb_C = \frac{1}{R} + j\omega C = Ye^{-j\Psi} \quad \text{– комплексная проводимость;}$$

$$\Psi = -\arctg \frac{b_C}{g} = -\arctg \omega CR.$$

**Треугольник проводимостей**, подобный треугольнику токов, приведен на рисунке 61б.

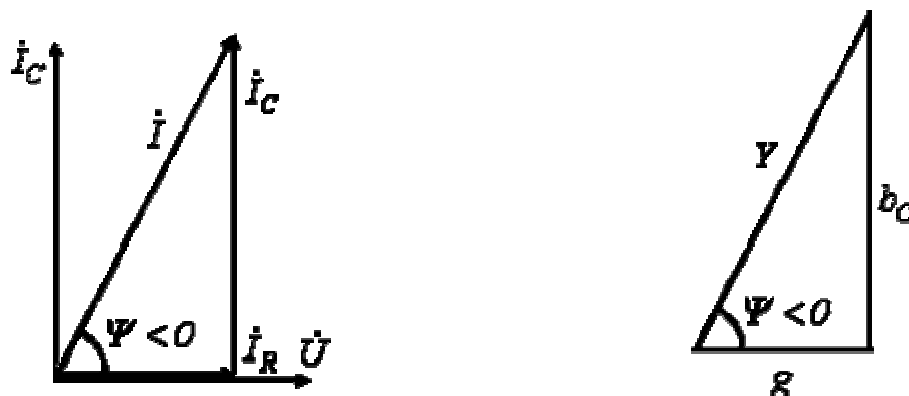


Рисунок 61- Треугольники токов и проводимостей

Для комплексного сопротивления цепи на рисунке 60 можно записать

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g + jb_C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{-jX_C}} = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C}.$$

Необходимо отметить, что полученный результат аналогичен известному из курса физики выражению для эквивалентного сопротивления двух параллельно соединенных резисторов.

### Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

Для цепи на рисунке 62 можно записать

$$U = U_R = U_L;$$

$$I_R = \frac{U_R}{R} = gU,$$

где  $g = \frac{1}{R}$  [См] – активная проводимость;

$$I_L = \frac{U_L}{X_L} = b_L U,$$

где  $b_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$  [См] – реактивная проводимость катушки индуктивности.

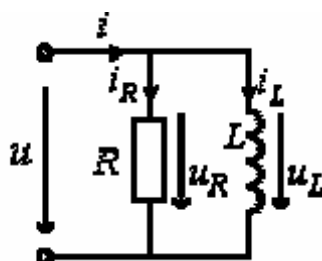


Рисунок 62 - Параллельное соединение резистивного и индуктивного элементов

Векторной диаграмме токов (рисунок 63а) для данной цепи соответствует уравнение в комплексной форме

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L = g\dot{U} - jb_L\dot{U} = (g - jb_L)\dot{U} = \underline{Y}\dot{U} = Ie^{-j\Psi},$$

где  $I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2}$ ;

$$\underline{Y} = g - jb_L = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = Ye^{-j\Psi} \quad \text{- комплексная проводимость;}$$

$$\Psi = \arctg \frac{b_L}{g} = \arctg \frac{R}{\omega L}.$$

**Треугольник проводимостей**, подобный треугольнику токов, приведен на рисунке 63б.

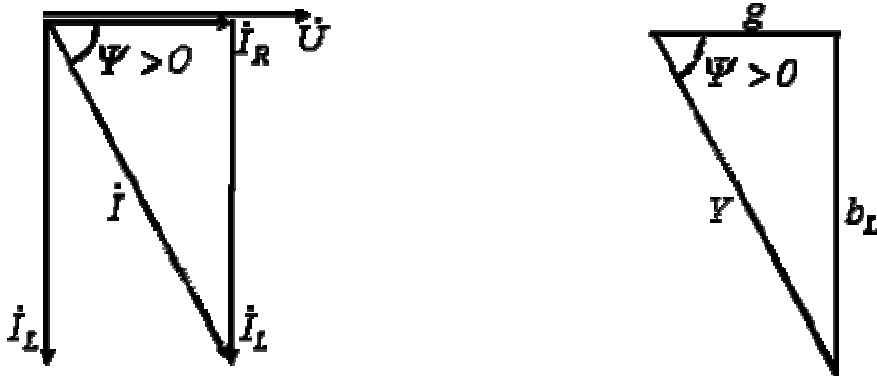


Рисунок 63 –Треугольники токов и проводимостей

Выражение комплексного сопротивления цепи на рисунке 62 имеет вид:

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{g - jb_L} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{j}{jX_L}} = \frac{RjX_L}{R + jX_L}.$$

### 2.1.5 Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС

Возьмем два участка цепи  $a-b$  и  $c-d$  (см. рисунок 64) и составим для них уравнения в комплексной форме с учетом указанных положительных направлений напряжений и токов.



Рисунок 64 – Участки цепи, содержащие ЭДС

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_a &= \dot{\phi}_b + \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \\ \dot{U}_{ab} &= \dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \underline{Z}_1; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_c &= \dot{\phi}_d + \dot{E}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2; \\ \dot{U}_{cd} &= \dot{\phi}_c - \dot{\phi}_d = \dot{E}_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_2; \\ \dot{I}_2 &= \frac{-\dot{E}_2 + \dot{U}_{cd}}{\underline{Z}_2}.\end{aligned}$$

Объединяя оба случая, получим

$$\dot{I} = \frac{\pm \dot{E} \mp \dot{U}}{\underline{Z}} \quad (2.20)$$

или для постоянного тока

$$I = \frac{\pm E \mp U}{R} \quad (2.21)$$

Формулы (2.20) и (2.21) являются **аналитическим выражением закона Ома для участка цепи с источником ЭДС**, согласно которому ток на участке цепи с источником ЭДС равен алгебраической сумме напряжения на зажимах участка цепи и ЭДС, деленной на сопротивление участка. В случае переменного тока все указанные величины суть комплексы. При этом ЭДС и напряжение берут со знаком “+”, если их направление совпадает с выбранным направлением тока, и со знаком “-”, если их направление противоположно направлению тока.

## 2.1.6 Основы символического метода расчета цепей синусоидального тока

Расчет цепей переменного синусоидального тока может производиться не только путем построения векторных диаграмм, но и аналитически – путем операций с комплексами, **символически изображающими** синусоидальные ЭДС, напряжения и токи. Достоинством векторных диаграмм является их наглядность, недостатком – малая точность графических построений. Применение символического метода позволяет производить расчеты цепей с большой степенью точности.

Символический метод расчета цепей синусоидального тока основан на законах Кирхгофа и законе Ома в комплексной форме.

Уравнения, выражающие законы Кирхгофа в комплексной форме, имеют совершенно такой же вид, как и соответствующие уравнения для цепей постоянного тока. Только токи, ЭДС, напряжения и сопротивления входят в уравнение в виде комплексных величин.

1. Первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \dot{I} = 0. \quad (2.22)$$

2. Второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum \dot{U} = 0 \quad (2.23)$$

или применительно к схемам замещения с источниками ЭДС

$$\sum \underline{Z} \dot{I} = \sum \dot{E}. \quad (2.24)$$

3. Соответственно матричная запись законов Кирхгофа в комплексной форме имеет вид:

- первый закон Кирхгофа:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0} ; \quad (2.25)$$

- второй закон Кирхгофа

$$\mathbf{B}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{0} . \quad (2.26)$$

Пример.

Дано:  $U = 120 \text{ В}; X_{C1} = \frac{1}{\omega C_1} = 100 \text{ Ом}; X_{L2} = \omega L_2 = 50 \text{ Ом};$

$$X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3} = 50 \text{ Ом}; R_1 = 25 \text{ Ом}; R_2 = 20 \text{ Ом}.$$

Определить:

- 1) полное комплексное сопротивление цепи  $\underline{Z}$ ;
- 2) токи  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$

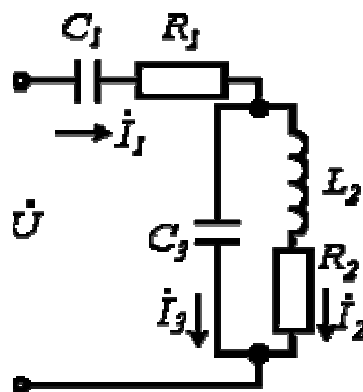


Рисунок 65 – Расчетная схема

Решение:

1. Записываем сопротивление второй ветви в комплексной форме:

$$\underline{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} = 20 + j50 \text{ Ом}.$$

2. Находим эквивалентное сопротивление параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{-jX_{C3} \cdot \underline{Z}_2}{-jX_{C3} + \underline{Z}_2} = \frac{-j50(20 + j50)}{-j50 + 20 + j50} = 125 - j50 \text{ Ом}.$$

3. Рассчитываем эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= -jX_{C1} + R_1 + \underline{Z}_{23} = -j100 + 25 + 125 - j50 = \\ &= 150 - j150 = \sqrt{2} \cdot 150 e^{-j45^\circ} = 211,5 e^{-j45^\circ} \text{ Ом}. \end{aligned}$$

4. Принимая начальную фазу напряжения за нуль, запишем:

$$\dot{U} = U e^{j0} = 120.$$

Тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = \frac{120}{211,5 e^{-j45^\circ}} = 0,57 e^{j45^\circ} = 0,4 + j0,4 \text{ (A)}$$

5. Поскольку ток распределяется обратно пропорционально сопротивлению ветвей (это вытекает из закона Ома), то

$$\begin{aligned} \dot{I}_2 &= \dot{I}_1 \frac{-jX_{C3}}{-jX_{C3} + \underline{Z}_2} = 0,57 e^{j45^\circ} \frac{-j50}{-j50 + 20 + j50} = 0,57 e^{j45^\circ} (-2,5j) = \\ &= 0,57 e^{j45^\circ} \cdot 2,5 e^{-j90^\circ} = 1,43 e^{-j45^\circ} = 1 - j \text{ (A)}. \end{aligned}$$

6. Ток в третьей ветви определяем по закону Кирхгофа:

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 0,4 + j0,4 - 1 + j = -0,6 + j1,4 \text{ (A)}.$$

7. Аналогичный результат можно получить, составив для данной схемы уравнения по законам Кирхгофа в комплексной форме

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 &= 0; \\ \dot{I}_1(-jX_{C1} + R_1) + \dot{I}_3(-jX_{C3}) &= \dot{U}; \\ \dot{I}_3(-jX_{C3}) - \dot{I}_2(R_2 + jX_{L2}) &= 0 \end{aligned}$$



или после подстановки численных значений параметров схемы.

### Контрольные вопросы

1. В чем сущность реактивных сопротивлений?
2. Какой из элементов: резистор, катушку индуктивности или конденсатор – можно использовать в качестве шунта для наблюдения за формой тока?
3. Почему катушки индуктивности и конденсаторы не используются в цепях постоянного тока?

## 2.2 Специальные методы расчета

Режим работы любой цепи полностью характеризуется уравнениями, составленными на основании законов Кирхгофа. При этом необходимо составить и решить систему с  $n$  неизвестными, что может оказаться весьма трудоемкой задачей при большом числе  $n$  ветвей схемы. Однако, число уравнений, подлежащих решению, может быть сокращено, если воспользоваться **специальными методами расчета**, к которым относятся методы контурных токов и узловых потенциалов.

### Метод контурных токов

Идея метода контурных токов: уравнения составляются только по второму закону Кирхгофа, но не для действительных, а для воображаемых токов, циркулирующих по замкнутым контурам, т.е. в случае выбора главных контуров равных токам ветвей связи. Число уравнений равно числу независимых контуров, т.е. числу ветвей связи графа  $c = n - m + 1$ . Первый закон Кирхгофа выполняется автоматически. Контур можно выбирать произвольно, лишь бы их число было равно  $c$  и чтобы каждый новый контур содержал хотя бы одну ветвь, не входящую в предыдущие. Такие контуры называются **независимыми**. Их выбор облегчает использование топологических понятий дерева и ветвей связи.

Направления истинных и контурных токов выбираются произвольно. Выбор положительных направлений перед началом расчета может не определять действительные направления токов в цепи. Если в результате расчета какой-либо из токов, как и при использовании уравнений по законам

Кирхгофа, получится со знаком “-”, это означает, что его истинное направление противоположно.

Пусть имеем схему по рисунку 66.

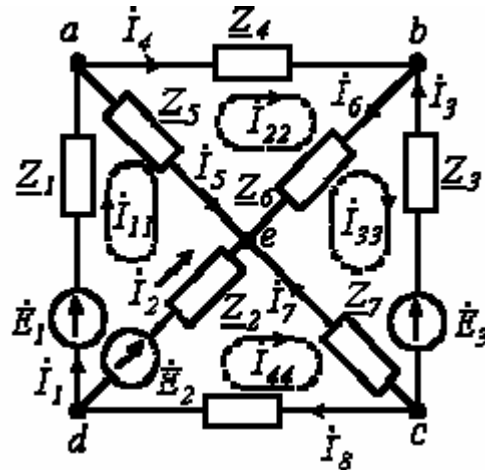


Рисунок 66 – Расчетная схема

Выразим токи ветвей через контурные токи:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{44} - \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_3 = -\dot{I}_{33};$$

$$\dot{I}_4 = \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_6 = \dot{I}_{22} - \dot{I}_{33};$$

$$\dot{I}_7 = \dot{I}_{33} - \dot{I}_{44}; \quad \dot{I}_8 = \dot{I}_{44}.$$

Обойдя контур  $aeda$ , по второму закону Кирхгофа имеем

$$\underline{Z}_1 \dot{I}_1 + \underline{Z}_5 \dot{I}_5 - \underline{Z}_2 \dot{I}_2 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Поскольку  $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11}; \quad \dot{I}_5 = \dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_{44} - \dot{I}_{11},$

то

$$(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_5) \dot{I}_{11} - \underline{Z}_5 \dot{I}_{22} + 0 \cdot \dot{I}_{33} - \underline{Z}_2 \dot{I}_{44} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Таким образом, получили уравнение для первого контура относительно контурных токов. Аналогично можно составить уравнения для второго, третьего и четвертого контуров:

$$\begin{aligned} -Z_5 \dot{I}_{11} + (Z_4 + Z_5 + Z_6) \dot{I}_{22} - Z_6 \dot{I}_{33} - 0 \cdot \dot{I}_{44} &= 0; \\ 0 \cdot \dot{I}_{11} - Z_6 \dot{I}_{22} + (Z_3 + Z_6 + Z_7) \dot{I}_{33} - Z_7 \dot{I}_{44} &= -\dot{E}_3; \\ -Z_2 \dot{I}_{11} + 0 \cdot \dot{I}_{22} - Z_7 \dot{I}_{33} + (Z_2 + Z_7 + Z_8) \dot{I}_{44} &= \dot{E}_2, \end{aligned}$$

Совместно с первым решить их относительно контурных токов и затем по уравнениям, связывающим контурные токи и токи ветвей, найти последние.

Однако данная система уравнений может быть составлена формальным путем:

$$\begin{aligned} Z_{11} \dot{I}_{11} - Z_{12} \dot{I}_{22} - Z_{13} \dot{I}_{33} - Z_{14} \dot{I}_{44} &= \dot{E}_{11} \\ -Z_{21} \dot{I}_{11} + Z_{22} \dot{I}_{22} - Z_{23} \dot{I}_{33} - Z_{24} \dot{I}_{44} &= \dot{E}_{22}; \\ -Z_{31} \dot{I}_{11} - Z_{32} \dot{I}_{22} + Z_{33} \dot{I}_{33} - Z_{34} \dot{I}_{44} &= \dot{E}_{33}; \\ -Z_{41} \dot{I}_{11} - Z_{42} \dot{I}_{22} - Z_{43} \dot{I}_{33} + Z_{44} \dot{I}_{44} &= \dot{E}_{44}. \end{aligned}$$

При составлении уравнений необходимо помнить следующее:

$Z_{ii}$  - сумма сопротивлений, входящих в  $i$ -й контур;

$Z_{ik}$  - сумма сопротивлений, общих для  $i$ -го и  $k$ -го контуров, причем  $Z_{ik} = Z_{ki}$ ;

члены на главной диагонали всегда пишутся со знаком “+”;

знак “+” перед остальными членами ставится в случае, если через общее сопротивление  $Z_{ik}$   $i$ -й и  $k$ -й контурные токи проходят в одном направлении, в противном случае ставится знак “-”;

если  $i$ -й и  $k$ -й контуры не имеют общих сопротивлений, то  $Z_{ik} = 0$ ;

в правой части уравнений записывается алгебраическая сумма ЭДС, входящих в контур: со знаком “+”, если направление ЭДС совпадает с выбранным направлением контурного тока, и “-”, если не совпадает.

В нашем случае, для первого уравнения системы, имеем:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3; \quad \underline{Z}_{12} = \underline{Z}_3; \quad \underline{Z}_{13} = 0; \quad \underline{Z}_{14} = \underline{Z}_2; \quad \dot{E}_{11} = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Следует обратить внимание на то, что, поскольку  $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki}$ , коэффициенты контурных уравнений всегда симметричны относительно главной диагонали.

Если в цепи содержатся помимо источников ЭДС источники тока, то они учитываются в левых частях уравнений как известные контурные токи:  $k$ -й контурный ток, проходящий через ветвь с  $k$ -м источником тока равен этому току ( $\dot{I}_{kk} = \dot{J}_k$ ).

### Метод узловых потенциалов

Данный метод вытекает из первого закона Кирхгофа. В качестве неизвестных принимаются потенциалы узлов, по найденным значениям которых с помощью закона Ома для участка цепи с источником ЭДС затем находят токи в ветвях. Поскольку потенциал – величина относительная, потенциал одного из узлов (любого) принимается равным нулю. Таким образом, число неизвестных потенциалов, а следовательно, и число уравнений равно  $(m - 1)$ , т.е. числу ветвей дерева  $\partial$ .

Пусть имеем схему по рисунку 67, в которой примем  $\phi_c = 0$ .

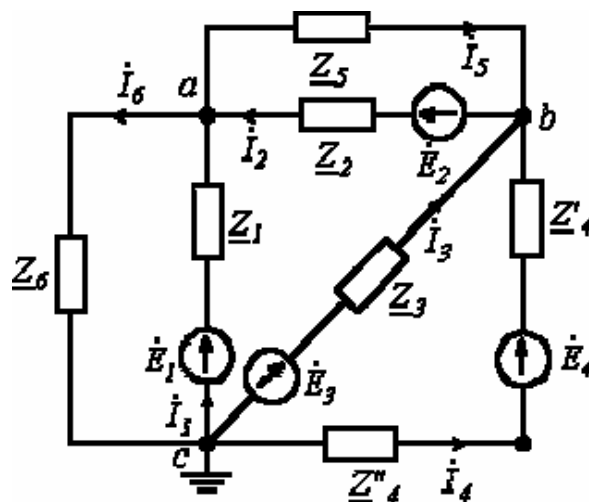


Рисунок 67 – Расчетная схема

Допустим, что  $\dot{\phi}_a$  и  $\dot{\phi}_b$  известны. Тогда значения токов на основании закона Ома для участка цепи с источником ЭДС

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{\phi}_a}{Z_1} = (\dot{E}_1 - \dot{\phi}_a) \underline{Y}_1; \\ \dot{I}_2 &= (\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_a + \dot{E}_2) \underline{Y}_2; \\ \dot{I}_3 &= (\dot{E}_3 - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_3; \\ \dot{I}_4 &= (\dot{E}_4 - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_4, \quad \text{где } \underline{Y}_4 = \frac{1}{Z'_4 + Z''_4}; \\ \dot{I}_5 &= (\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_5; \\ \dot{I}_6 &= \dot{\phi}_a \underline{Y}_6. \end{aligned} \right\}$$

Запишем уравнение по первому закону Кирхгофа для узла  $a$ :

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_5 - \dot{I}_6 = 0,$$

и подставим значения входящих в него токов, определенных выше:

$$(\dot{E}_1 - \dot{\phi}_a) \underline{Y}_1 + (\dot{\phi}_b - \dot{\phi}_a + \dot{E}_2) \underline{Y}_2 - (\dot{\phi}_a - \dot{\phi}_b) \underline{Y}_5 - \dot{\phi}_a \underline{Y}_6 = 0.$$

Сгруппировав соответствующие члены, получим:

$$(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_5 + \underline{Y}_6) \dot{\phi}_a - (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) \dot{\phi}_b = \dot{E}_1 \underline{Y}_1 + \dot{E}_2 \underline{Y}_2.$$

Аналогично можно записать для узла  $b$ :

$$-(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_5) \dot{\phi}_a + (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \dot{\phi}_b = \dot{E}_3 \underline{Y}_3 + \dot{E}_4 \underline{Y}_4 - \dot{E}_2 \underline{Y}_2.$$

Как и по методу контурных токов, система уравнений по методу узловых потенциалов может быть составлена формальным путем. При этом необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. В левой части  $i$ -го уравнения записывается со знаком “+” потенциал  $\dot{\phi}_i$   $i$ -го узла, для которого составляется данное  $i$ -е уравнение, умноженный на сумму проводимостей  $\underline{Y}_{in}$  ветвей, присоединенных к данному  $i$ -му узлу, и со знаком “-” потенциал  $\dot{\phi}_k$  соседних узлов, каждый из которых умножен на сумму проводимостей  $\underline{Y}_{ik}$  ветвей, присоединенных к  $i$ -му и  $k$ -му узлам.

Из сказанного следует, что все члены  $\dot{\phi}_i \underline{Y}_{in}$ , стоящие на главной диагонали в левой части системы уравнений, записываются со знаком “+”, а

все остальные – со знаком “-”, причем  $\underline{Y}_{ik} = \underline{Y}_{ki}$ . Последнее равенство по аналогии с методом контурных токов обеспечивает симметрию коэффициентов уравнений относительно главной диагонали.

2. В правой части  $i$ -го уравнения записывается так называемый узловой ток  $\dot{j}_i$ , равный сумме произведений ЭДС ветвей, подходящих к  $i$ -му узлу, и проводимостей этих ветвей. При этом член суммы записывается со знаком “+”, если соответствующая ЭДС направлена к  $i$ -му узлу, в противном случае ставится знак “-”. Если в подходящих к  $i$ -му узлу ветвях содержатся источники тока, то знаки токов источников токов, входящих в узловой ток простыми слагаемыми, определяются аналогично.

В заключение отметим, что выбор того или иного из рассмотренных методов определяется тем, что следует найти, а также тем, какой из них обеспечивает меньший порядок системы уравнений. При расчете токов при одинаковом числе уравнений предпочтительнее использовать метод контурных токов, так как он не требует дополнительных вычислений с использованием закона Ома. Метод узловых потенциалов очень удобен при расчетах многофазных цепей, но не удобен при расчете цепей со взаимной индуктивностью.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается сущность символического метода расчета цепей синусоидального тока?
2. В чем состоит сущность метода контурных токов?
3. В чем состоит сущность метода узловых потенциалов?

### 2.3 Основы матричных методов расчета электрических цепей

Рассмотренные методы расчета электрических цепей – непосредственно по законам Кирхгофа, методы контурных токов и узловых потенциалов – позволяют принципиально рассчитать любую схему. Однако их применение без использования введенных ранее топологических матриц рационально для относительно простых схем. Использование матричных методов расчета позволяет формализовать процесс составления уравнений электромагнитного баланса цепи, а также упорядочить ввод данных в ЭВМ, что особенно существенно при расчете сложных разветвленных схем.

Переходя к матричным методам расчета цепей, запишем закон Ома в матричной форме.

Пусть имеем схему по рисунку 68, где  $\dot{J}_k$  - источник тока.

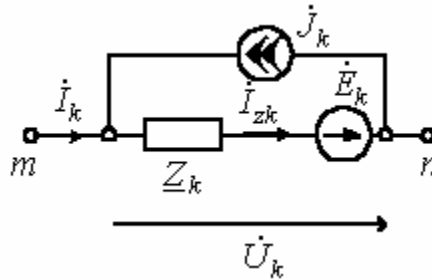


Рисунок 68 – Схема электрической цепи

В соответствии с рассмотренным нами ранее законом Ома для участка цепи с ЭДС для данной схемы можно записать:

$$\dot{U}_{mn} = \dot{U}_k = \dot{I}_{zk} Z_k - \dot{E}_k. \quad (2.27)$$

Однако, для дальнейших выкладок будет удобнее представить ток  $\dot{I}_{zk}$  как сумму токов  $k$ -й ветви и источника тока, т.е.:

$$\dot{I}_{zk} = \dot{I}_k + \dot{J}_k. \quad (2.28)$$

Подставив (2.28) в (2.27), получим:

$$\dot{U}_k = Z_k (\dot{I}_k + \dot{J}_k) - \dot{E}_k. \quad (2.29)$$

Формула (2.29) представляет собой аналитическое выражение закона Ома для участка цепи с источниками ЭДС и тока (обобщенной ветви).

Соотношение (2.29) запишем для всех  $n$  ветвей схемы в виде матричного равенства

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & & & \\ & \underline{Z}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 + \dot{J}_1 \\ \dot{I}_2 + \dot{J}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_n + \dot{J}_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \vdots \\ \dot{E}_n \end{bmatrix}$$

или

$$\dot{\underline{U}} = \underline{Z}(\dot{\underline{I}} + \dot{\underline{J}}) - \dot{\underline{E}}, \quad (2.30)$$

где  $\underline{Z}$  – диагональная квадратная (размерностью  $n \times n$ ) матрица сопротивлений ветвей, все элементы которой (взаимную индуктивность не учитываем), за исключением элементов главной диагонали, равны нулю.

Соотношение (2.30) представляет собой матричную запись закона Ома.

Если обе части равенства (2.30) умножить слева на контурную матрицу  $\mathbf{B}$  и учесть второй закон Кирхгофа, согласно которому

$$\mathbf{B}\dot{\underline{U}} = \mathbf{0}, \quad (2.31)$$

то

$$\mathbf{B}\underline{Z}(\dot{\underline{I}} + \dot{\underline{J}}) = \mathbf{B}\dot{\underline{E}}, \quad (2.32)$$

то есть получили новую запись в матричной форме второго закона Кирхгофа.

### Метод контурных токов в матричной форме

В соответствии с введенным ранее понятием матрицы главных контуров  $\mathbf{B}$ , записываемой для главных контуров, в качестве независимых переменных примем токи ветвей связи, которые и будут равны искомым контурным токам.

Уравнения с контурными токами получаются на основании второго закона Кирхгофа; их число равно числу независимых уравнений,



составляемых для контуров, т.е. числу ветвей связи  $c=n-m+1$ . Выражение (2.32) запишем следующим образом:

$$\underline{B} \underline{Z} \dot{\underline{I}} = \underline{B} \dot{\underline{E}} - \underline{B} \underline{Z} \dot{\underline{J}}. \quad (2.33)$$

В соответствии с методом контурных токов токи всех ветвей могут быть выражены как линейные комбинации контурных токов или в рассматриваемом случае токов ветвей связи. Если элементы  $j$ -го столбца матрицы  $\underline{B}$  умножить соответствующим образом на контурные токи, то сумма таких произведений и будет выражением тока  $j$ -й ветви через контурные токи (через токи ветвей связи). Сказанное может быть записано в виде матричного соотношения

$$\dot{\underline{I}} = \underline{B}^T \dot{\underline{I}}_k, \quad (2.34)$$

где  $\dot{\underline{I}}_k$  - столбцовая матрица контурных токов;  $\underline{B}^T$  - транспонированная контурная матрица.

С учетом (2.34) соотношение (2.33) можно записать, как:

$$\underline{B} \underline{Z} \underline{B}^T \dot{\underline{I}}_k = \underline{B} \dot{\underline{E}} - \underline{B} \underline{Z} \dot{\underline{J}} \quad (2.35)$$

Полученное уравнение представляет собой контурные уравнения в матричной форме. Если обозначить

$$\underline{Z}_k = \underline{B} \underline{Z} \underline{B}^T, \quad (2.36)$$

$$\dot{\underline{E}}_k = \underline{B} \dot{\underline{E}} - \underline{B} \underline{Z} \dot{\underline{J}}. \quad (2.37)$$

то получим матричную форму записи уравнений, составленных по методу контурных токов:

$$\underline{Z}_k \dot{\underline{I}}_k = \dot{\underline{E}}_k, \quad (2.38)$$

где  $\underline{Z}_k$  - матрица контурных сопротивлений;  $\dot{\underline{E}}_k$  - матрица контурных ЭДС.

В развернутой форме (2.38) можно записать, как:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1c} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2c} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Z}_{c1} & \underline{Z}_{c2} & \cdots & \underline{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{k1} \\ \dot{I}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{I}_{kc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{k1} \\ \dot{E}_{k2} \\ \vdots \\ \dot{E}_{kc} \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

то есть получили известный из метода контурных токов результат.

Рассмотрим пример составления контурных уравнений.

Пусть имеем схему по рисунку 69. Данная схема имеет четыре узла ( $m=4$ ) и шесть обобщенных ветвей ( $n=6$ ). Число независимых контуров, равное числу ветвей связи,  $c=n-m+1=6-4+1=3$ .

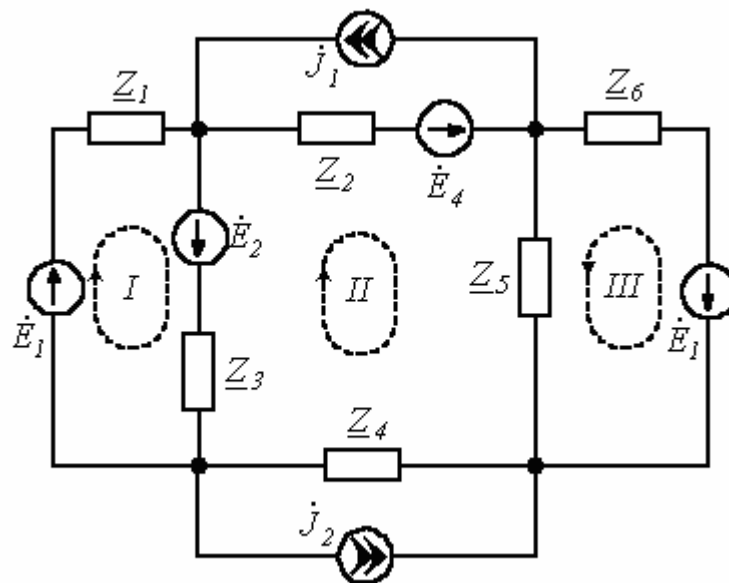


Рисунок 69 – Расчетная схема

Граф схемы с выбранным деревом (ветви 1, 2, 3) имеет вид по рисунку 70.

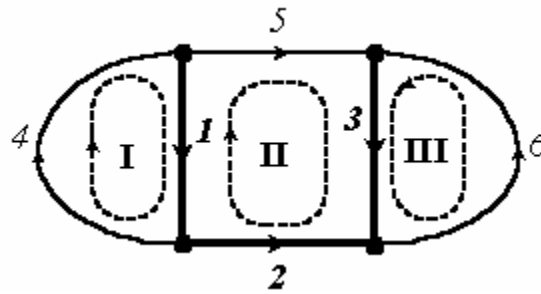


Рисунок 70 – Граф схемы

Запишем матрицу контуров, которая будет являться матрицей главных контуров, поскольку каждая ветвь связи входит только в один контур. Принимая за направление обхода контуров направления ветвей связи, получим:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица сопротивлений ветвей

$$\underline{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & & & & & \\ & \underline{Z}_4 & & & & \\ & & \underline{Z}_5 & & & \\ & & & \underline{Z}_1 & & \\ & & & & \underline{Z}_2 & \\ & & & & & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}$$

Матрица контурных сопротивлений

$$\underline{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{B} \underline{\mathbf{Z}} \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & & & & & \\ & \underline{Z}_4 & & & & \\ & & \underline{Z}_5 & & & \\ & & & \underline{Z}_1 & & \\ & & & & \underline{Z}_2 & \\ & & & & & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 & 0 & 0 & \underline{Z}_1 & 0 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & -\underline{Z}_4 & \underline{Z}_5 & 0 & \underline{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_5 & 0 & 0 & \underline{Z}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_1) & -\underline{Z}_3 & 0 \\ -\underline{Z}_3 & (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_2) & \underline{Z}_5 \\ 0 & \underline{Z}_5 & (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6) \end{bmatrix}.$$

Матрицы ЭДС и токов источников

$$\dot{\mathbf{E}} = [\dot{E}_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dot{E}_1 \quad \dot{E}_4 \quad -\dot{E}_3]^T$$

$$\dot{\mathbf{J}} = [0 \quad -j_2 \quad 0 \quad 0 \quad j_1 \quad 0]^T$$

Тогда матрица контурных ЭДС

$$\dot{\mathbf{E}}_k = \mathbf{B} \dot{\mathbf{E}} - \mathbf{B} \underline{\mathbf{Z}} \dot{\mathbf{J}} = \mathbf{B} (\dot{\mathbf{E}} - \underline{\mathbf{Z}} \dot{\mathbf{J}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_2 - 0 \\ 0 + j_2 \underline{Z}_4 \\ 0 - 0 \\ \dot{E}_1 - 0 \\ \dot{E}_4 - j_1 \underline{Z}_2 \\ -\dot{E}_3 - 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{E}_2 + \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 - \dot{J}_2 \underline{Z}_4 + \dot{E}_4 - \dot{J}_1 \underline{Z}_2 \\ -\dot{E}_3 \end{bmatrix}.$$

Матрица контурных токов

$$\dot{\mathbf{I}}_k = [\dot{I}_{k1} \quad \dot{I}_{k2} \quad \dot{I}_{k3}]^T = [\dot{I}_4 \quad \dot{I}_5 \quad \dot{I}_6]^T$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{31} & \underline{Z}_{32} & \underline{Z}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_4 \\ \dot{I}_5 \\ \dot{I}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_{k1} \\ \dot{E}_{k2} \\ \dot{E}_{k3} \end{bmatrix},$$

где  $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3$ ;  $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -\underline{Z}_3$ ;  $\underline{Z}_{13} = \underline{Z}_{31} = 0$ ;  $\underline{Z}_{22} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_4 + \underline{Z}_5$ ;  $\underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{32} = \underline{Z}_5$ ;  $\underline{Z}_{33} = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6$ ;  $\dot{E}_{k1} = \dot{E}_1 + \dot{E}_2$ ;  $\dot{E}_{k2} = \dot{E}_4 - \dot{E}_2 - \dot{J}_2 \underline{Z}_4 - \dot{J}_1 \underline{Z}_2$ ;  $\dot{E}_{k3} = -\dot{E}_3$ .

Анализ результатов показывает, что полученные три уравнения идентичны тем, которые можно записать непосредственно из рассмотрения схемы по известным правилам составления уравнений по методу контурных токов.

### Метод узловых потенциалов в матричной форме

На основании полученного выше соотношения (2.30), представляющего собой, как было указано, матричную запись закона Ома, запишем матричное выражение:

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{Y}(\dot{\mathbf{U}} + \dot{\mathbf{E}}) - \dot{\mathbf{J}}, \quad (2.40)$$

где  $\underline{Y} = \underline{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & & & \\ & \underline{Y}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Y}_n \end{bmatrix}$  - диагональная матрица проводимостей ветвей, все члены которой, за исключением элементов главной диагонали, равны нулю.

Матрицы  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  взаимно обратны.

Умножив обе части равенства (2.40) на узловую матрицу  $A$  и учитывая первый закон Кирхгофа, согласно которому

$$A\dot{I} = 0, \quad (2.41)$$

получим:

$$A\underline{Y}(\dot{U} + \dot{E}) = A\dot{J}. \quad (2.42)$$

Выражение (2.42) перепишем, как:

$$A\underline{Y}\dot{U} = A\dot{J} - A\underline{Y}\dot{E}. \quad (2.43)$$

Принимая потенциал узла, для которого отсутствует строка в матрице  $A$ , равным нулю, определим напряжения на зажимах ветвей:

$$\dot{U} = A^T \dot{\phi}. \quad (2.44)$$

Тогда получаем матричное уравнение вида:

$$A\underline{Y}A^T \dot{\phi} = A\dot{J} - A\underline{Y}\dot{E}. \quad (2.45)$$

Данное уравнение представляет собой узловые уравнения в матричной форме. Если обозначить

$$\underline{Y}_y = A\underline{Y}A^T \quad (2.46)$$

$$\dot{J}_y = A\dot{J} - A\underline{Y}\dot{E}, \quad (2.47)$$

то получим матричную форму записи уравнений, составленных по методу узловых потенциалов:

$$\underline{Y}_y \underline{\phi} = \underline{J}_y \quad (2.48)$$

где  $\underline{Y}_y$  - матрица узловых проводимостей;  $\underline{J}_y$  - матрица узловых токов.

В развернутом виде соотношение (2.48) можно записать, как:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} & \cdots & \underline{Y}_{1,(m-1)} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} & \cdots & \underline{Y}_{2,(m-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underline{Y}_{(m-1),1} & \underline{Y}_{(m-1),2} & \cdots & \underline{Y}_{(m-1),(m-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{y1} \\ \dot{J}_{y2} \\ \vdots \\ \dot{J}_{y(m-1)} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

то есть получили известный из метода узловых потенциалов результат.

Рассмотрим составление узловых уравнений на примере схемы по рисунку 71.

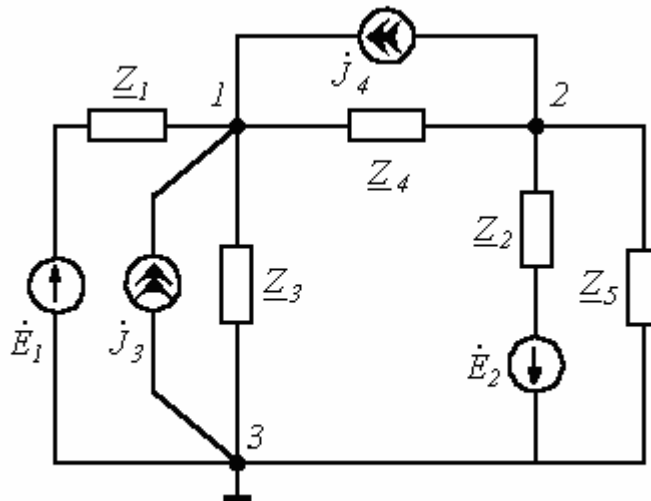


Рисунок 71 – Расчетная схема

Данная схема имеет 3 узла ( $m=3$ ) и 5 ветвей ( $n=5$ ). Граф схемы с выбранной ориентацией ветвей представлен на рисунке 72.

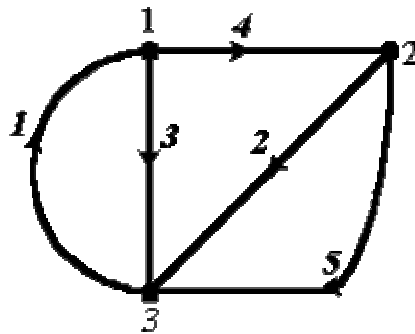


Рисунок 72- Граф схемы

Узловая матрица (примем  $\phi_3 = 0$ )

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица проводимостей ветвей:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & & & & \\ & \underline{Y}_2 & & & \\ & & \underline{Y}_3 & & \\ & & & \underline{Y}_4 & \\ & & & & \underline{Y}_5 \end{bmatrix},$$

где  $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ .



Матрица узловых проводимостей

$$\underline{Y}_y = \underline{A} \underline{Y} \underline{A}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & & & & \\ & \underline{Y}_2 & & & \\ & & \underline{Y}_3 & & \\ & & & \underline{Y}_4 & \\ & & & & \underline{Y}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\underline{Y}_1 & 0 & \underline{Y}_3 & \underline{Y}_4 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 & -\underline{Y}_4 & \underline{Y}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) & -\underline{Y}_4 \\ -\underline{Y}_4 & (\underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5) \end{bmatrix}.$$

Матрицы токов и ЭДС источников

$$\underline{J} = [0 \quad 0 \quad j_3 \quad j_4 \quad 0]^T$$

$$\underline{\dot{E}} = [\dot{E}_1 \quad \dot{E}_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

Следовательно, матрица узловых токов будет иметь вид:

$$\underline{j}_y = \underline{A}(\underline{J} - \underline{Y}\underline{\dot{E}}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - \underline{Y}_1 \dot{E}_1 \\ 0 - \underline{Y}_2 \dot{E}_2 \\ j_3 - 0 \\ j_4 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \dot{E}_1 + j_3 + j_4 \\ -\underline{Y}_2 \dot{E}_2 - j_4 \end{bmatrix}$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1 \\ \dot{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{j}_{y1} \\ \dot{j}_{y2} \end{bmatrix},$$

где  $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4$ ;  $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21} = -\underline{Y}_4$ ;  $\underline{Y}_{22} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5$ ;  
 $\dot{j}_{y1} = \underline{Y}_1 \dot{E}_1 + \dot{j}_3 + \dot{j}_4$ ;  $\dot{j}_{y2} = -\dot{j}_4 - \underline{Y}_2 \dot{E}_2$ .

Анализ результатов показывает, что полученные уравнения идентичны тем, которые можно записать непосредственно из рассмотрения схемы по известным правилам составления уравнений по методу узловых потенциалов.

## Контрольные вопросы

1. В чем заключаются преимущества использования матричных методов расчета цепей?
2. Запишите выражения матрицы контурных сопротивлений и матрицы контурных ЭДС.
3. Запишите выражения матрицы узловых проводимостей и матрицы узловых токов.

## 2.4 Преобразование энергии в электрической цепи. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощности синусоидального тока

Передача энергии  $w$  по электрической цепи (например, по линии электропередачи), рассеяние энергии, то есть переход электромагнитной энергии в тепловую, а также и другие виды преобразования энергии характеризуются интенсивностью, с которой протекает процесс, то есть тем, сколько энергии передается по линии в единицу времени, сколько энергии рассеивается в единицу времени. Интенсивность передачи или преобразования энергии называется мощностью  $p$ . Сказанному соответствует математическое определение:

$$p = \frac{dw}{dt} . \quad (2.50)$$

Выражение для мгновенного значения мощности в электрических цепях имеет вид:

$$p = ui . \quad (2.51)$$

Приняв начальную фазу напряжения за нуль, а сдвиг фаз между напряжением и током за  $-\varphi$ , получим:

$$\begin{aligned}
 p &= ui = U_m \sin \alpha t \cdot I_m \sin(\alpha t - \varphi) = U_m I_m \sin \alpha t \sin(\alpha t - \varphi) = \\
 &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi - \cos(2\alpha t - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\alpha t - \varphi)
 \end{aligned}
 \quad (2.52)$$

Итак, мгновенная мощность имеет постоянную составляющую и гармоническую составляющую, угловая частота которой в 2 раза больше угловой частоты напряжения и тока.

Когда мгновенная мощность отрицательна, а это имеет место (см. рисунок 73), когда **u** и **i** разных знаков, т.е. когда направления напряжения и тока в двухполюснике противоположны, энергия возвращается из двухполюсника источнику питания.

Такой возврат энергии источнику происходит за счет того, что энергия периодически запасается в магнитных и электрических полях соответственно индуктивных и емкостных элементов, входящих в состав двухполюсника.

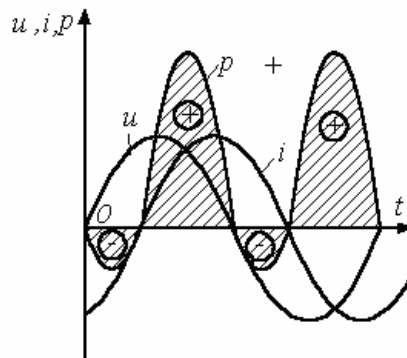


Рисунок 73 – Графики напряжения, тока и мощности

Энергия, отдаваемая источником двухполюснику в течение времени **t** равна  $\int_0^t p dt$ .

Среднее за период значение мгновенной мощности называется

**активной мощностью**  $P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt \text{ (Вт)}$ .

Принимая во внимание, что  $\int_0^T \cos(2\omega t - \varphi) dt = 0$ , из (3) получим:

$$P = UI \cos \varphi. \quad (2.53)$$

Активная мощность, потребляемая пассивным двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник будет генерировать энергию),

поэтому  $\cos \varphi \geq 0$ , т.е. на входе пассивного двухполюсника  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Случай  $P=0$ ,  $\varphi = \left| \frac{\pi}{2} \right|$  теоретически возможен для двухполюсника, не имеющего активных сопротивлений, а содержащего только идеальные индуктивные и емкостные элементы.

### Резистор (идеальное активное сопротивление).

Здесь напряжение и ток (см. рисунок 74) совпадают по фазе ( $\varphi = 0$ ), поэтому мощность  $P = ui$  всегда положительна, т.е. резистор потребляет активную мощность

$$\begin{aligned} P &= UI \cos \varphi = |\cos 0 = 1| = UI = \\ &= RI^2 = \frac{U^2}{R}. \end{aligned}$$

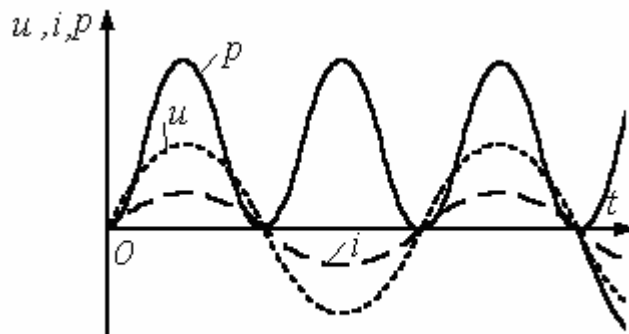


Рисунок 74 - Графики напряжения, тока и мощности на резисторе

## Катушка индуктивности (идеальная индуктивность)

При идеальной индуктивности ток отстает от напряжения по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Поэтому в соответствии с (2.52) можно записать

$$\begin{aligned} p &= U_L I_L \cos \frac{\pi}{2} - \\ &- U_L I_L \cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -U_L I_L \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Участок 1-2: энергия  $\frac{Li^2}{2}$ , запасаемая в магнитном поле катушки, нарастает.

Участок 2-3: энергия магнитного поля убывает, возвращаясь в источник рисунок 75.

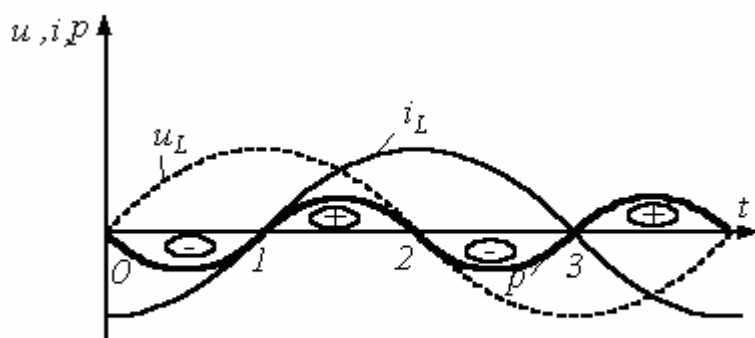


Рисунок 75 - Графики напряжения, тока и мощности на катушке индуктивности

## Конденсатор (идеальная емкость)

Аналогичный характер имеют процессы и для идеальной емкости.

Здесь  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Поэтому из (2.52) вытекает, что  $p = U_C I_C \sin 2\omega t$ . Таким образом, в катушке индуктивности и конденсаторе активная мощность не потребляется ( $P=0$ ), так как в них не происходит необратимого преобразования энергии в другие виды энергии. Здесь происходит только циркуляция энергии: электрическая энергия запасается в магнитном поле катушки или электрическом поле конденсатора на протяжении четверти периода, а на протяжении следующей четверти периода энергия вновь возвращается в сеть. В силу этого катушку индуктивности и конденсатор называют реактивными элементами, а их сопротивления  $X_L$  и  $X_C$ , в отличие от активного сопротивления  $R$  резистора, – реактивными.

Интенсивность обмена энергии принято характеризовать наибольшим значением скорости поступления энергии в магнитное поле катушки или электрическое поле конденсатора, которое называется **реактивной мощностью**.

В общем случае выражение для реактивной мощности имеет вид:

$$Q = UI \sin \varphi \quad (2.54)$$

Она положительна при отстающем токе (индуктивная нагрузка-  $\varphi > 0$ ) и отрицательна при опережающем токе (емкостная нагрузка-  $\varphi < 0$ ). Единицу мощности в применении к измерению реактивной мощности называют **вольт-ампер реактивный (ВАр)**.

В частности для катушки индуктивности имеем:

$$Q_L = UI \sin \varphi = UI, \text{ так как } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$Q_L = UI = \omega L I^2 = \omega L \frac{I_m^2}{2} = \omega \left[ \frac{L I_m^2}{2} \right].$$

Из последнего видно, что реактивная мощность для идеальной катушки индуктивности пропорциональна частоте и максимальному запасу энергии в катушке. Аналогично можно получить для идеального конденсатора:

$$|Q_C| = \omega \left[ \frac{CI_m^2}{2} \right].$$

## Полная мощность

Помимо понятий активной и реактивной мощностей в электротехнике широко используется понятие **полной мощности**:

$$S = UI \quad (\text{ВА}) \quad (2.55)$$

Активная, реактивная и полная мощности связаны следующим соотношением:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (2.56)$$

Отношение активной мощности к полной называют **коэффициентом мощности**. Из приведенных выше соотношений видно, что коэффициент мощности  $\cos \varphi$  равен косинусу угла сдвига между током и напряжением.

Итак,

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad (2.57)$$

## Комплексная мощность

Активную, реактивную и полную мощности можно определить, пользуясь комплексными изображениями напряжения и тока. Пусть  $\dot{U} = Ue^{j\psi_u}$ , а  $\dot{I} = Ie^{j\psi_i}$ . Тогда комплекс полной мощности:

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* \quad (2.58)$$

где  $\dot{I}^*$  - комплекс, сопряженный с комплексом  $\dot{I}$ .

$$\underline{S} = \dot{U} \dot{I}^* = Ue^{j\psi_u} \cdot Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j\varphi} = |\varphi = \psi_u - \psi_i| = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

Комплексной мощности можно поставить в соответствие треугольник мощностей (см. рисунок 76).

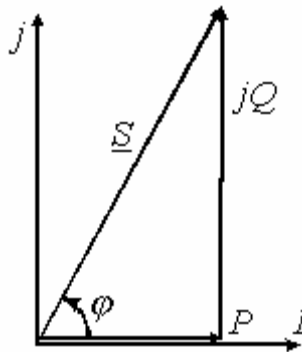


Рисунок 76 – Треугольник мощностей

Рисунку 76 соответствует  $\cos \varphi > 0$  (активно-индуктивная нагрузка).

### Применение статических конденсаторов для повышения $\cos \varphi$

Как уже указывалось, реактивная мощность

$\underline{Z} = R + jX$ ;  $\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}$ ;  $\underline{S} = \dot{U}^* \dot{I} = \underline{Z}\dot{I}^2 = RI^2 + jXI^2$  циркулирует между источником и потребителем. Реактивный ток, не совершая полезной работы, приводит к дополнительным потерям в силовом оборудовании и, следовательно, к завышению его установленной мощности. В этой связи понятно стремление к увеличению  $\cos \varphi$  в силовых электрических цепях.

Следует указать, что подавляющее большинство потребителей (электродвигатели, электрические печи, другие различные устройства и приборы) как нагрузка носит активно-индуктивный характер.

Если параллельно такой нагрузке  $\underline{Z}_H$  (см. рис. 77а), включить конденсатор  $C$ , то общий ток  $\dot{I}$ , как видно из векторной диаграммы (рис. 77б), приближается по фазе к напряжению, т.е.  $\cos \varphi$  увеличивается, а общая величина тока (а следовательно, потери) уменьшается при постоянстве



активной мощности  $P = UI \cos \varphi$ . На этом основано применение конденсаторов для повышения  $\cos \varphi$ .

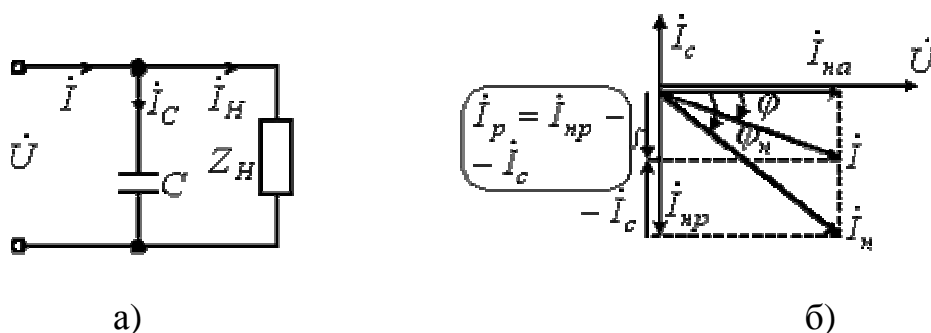


Рисунок 77 – Компенсация реактивной мощности:

- а) Принципиальная схема компенсации реактивной мощности;
- б) Векторная диаграмма, поясняющая компенсацию реактивной мощности

Какую емкость  $C$  нужно взять, чтобы повысить коэффициент мощности от значения  $\cos \varphi_n$  до значения  $\cos \varphi > \cos \varphi_n$ ?

Разложим  $\dot{I}_n$  на активную  $I_{na} = I_n \cos \varphi_n$  и реактивную  $I_{nr} = I_n \sin \varphi_n$  составляющие. Ток через конденсатор  $\dot{I}_c$  компенсирует часть реактивной составляющей тока нагрузки  $\dot{I}_n$ :

$$I_p = I_{nr} - I_c; \quad (2.59)$$

$$I_{nr} = I_{na} \operatorname{tg} \varphi_n = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi_n; \quad (2.60)$$

$$I_p = I_{na} \operatorname{tg} \varphi = \frac{P_n}{U} \operatorname{tg} \varphi. \quad (2.61)$$

Из (2.60) и (2.61) с учетом (2.59) имеем

$$I_c = \frac{P_n}{U} (tg \varphi_n - tg \varphi)$$

но  $I_c = \omega C U$ , откуда необходимая для повышения  $\cos \varphi$  емкость:

$$C = \frac{P_n}{U^2 \omega} (tg \varphi_n - tg \varphi) \quad (2.62)$$

### Баланс мощностей

Баланс мощностей является следствием закона сохранения энергии и может служить критерием правильности расчета электрической цепи.

#### а) Постоянный ток

Для любой цепи постоянного тока выполняется соотношение:

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \quad (2.63)$$

Это уравнение представляет собой математическую форму записи баланса мощностей: суммарная мощность, генерируемая источниками электрической энергии, равна суммарной мощности, потребляемой в цепи.

Следует указать, что в левой части (2.63) слагаемые имеют знак “+”, поскольку активная мощность рассеивается на резисторах. В правой части (2.63) сумма слагаемых больше нуля, но отдельные члены здесь могут иметь знак “-”, что говорит о том, что соответствующие источники работают в режиме потребителей энергии (например, заряд аккумулятора).

#### б) Переменный ток.

Из закона сохранения энергии следует, что сумма всех отдаваемых активных мощностей равна сумме всех потребляемых активных мощностей, т.е.

$$\sum_{k=1}^n R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \cos \varphi_{k2(\text{генератора})} \quad (2.64)$$

Доказано, что баланс соблюдается и для реактивных мощностей:

$$\sum_{k=1}^n \pm X_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k \sin \varphi_{k2}, \quad (2.65)$$

где знак “+” относится к индуктивным элементам ( $X = \omega L$ ),

“−” – к емкостным ( $X_c = 1/(\omega C)$ ).

Умножив (2.65) на “j” и сложив полученный результат с (2.64), придем к аналитическому выражению баланса мощностей в цепях синусоидального тока (без учета взаимной индуктивности):

$$\sum_{k=1}^n (R_k \pm jX_k) I_k^2 = \sum_{k=1}^n E_k I_k (\cos \varphi_{k2} + j \sin \varphi_{k2}) = \sum_{k=1}^n E_k I_k e^{j\varphi_{k2}}$$

или

$$\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k I_k^2 = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \times I_k^*$$

## Контрольные вопросы

1. Что такое активная мощность?
2. Что такое реактивная мощность, с какими элементами она связана?
3. Что такое полная мощность?
4. Почему необходимо стремиться к повышению коэффициента мощности  $\cos \varphi$ ?
5. Критерием чего служит баланс мощностей?

## 2.5 Резонансы в цепях синусоидального тока

Резонансом называется такой режим работы цепи, включающий в себя индуктивные и емкостные элементы, при котором ее входное сопротивление (входная проводимость) вещественно. Следствием этого является совпадение по фазе тока на входе цепи с входным напряжением.

### Резонанс в цепи с последовательно соединенными элементами (резонанс напряжений)

Для цепи на рисунок 78 имеет место

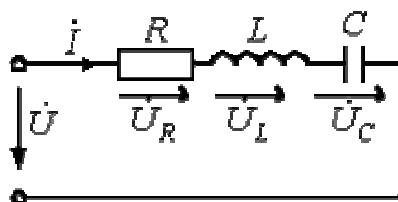


Рисунок 78 - Цепь с последовательно соединенными элементами

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{I} \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{I} \underline{Z}$$

где

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j\varphi}; \quad (2.66)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (2.67)$$

В зависимости от соотношения величин  $\omega L$  и  $1/(\omega C)$  возможны три различных случая:

1. В цепи преобладает индуктивность, т.е.  $\omega L > 1/(\omega C)$ , а следовательно,

$\dot{U}_L > \dot{U}_C$ . Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 79,а.

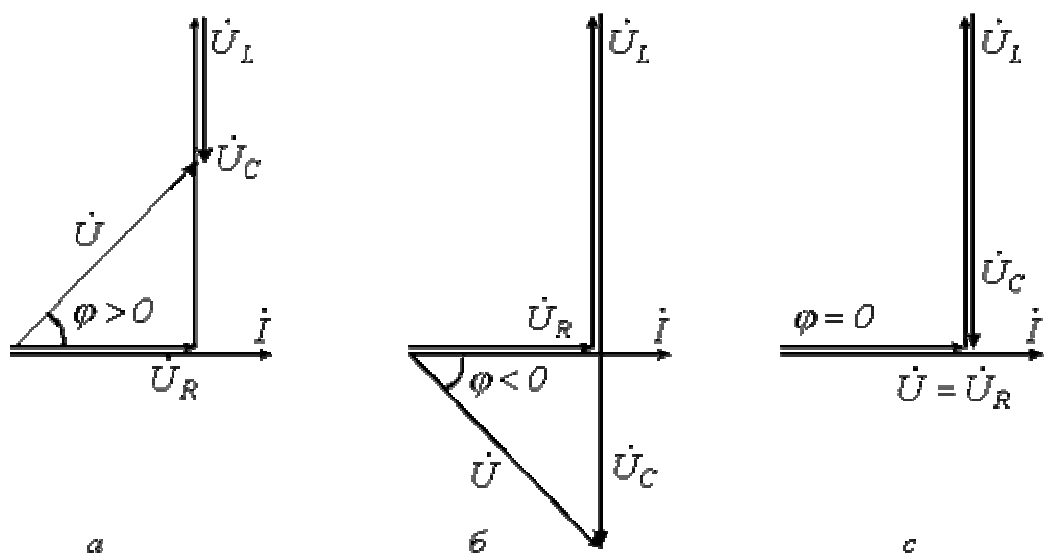


Рисунок 79 – Векторные диаграммы для цепи с последовательно соединенными элементами

2. В цепи преобладает емкость, т.е.  $\omega L < 1/(\omega C)$ , а значит,  $\dot{U}_L < \dot{U}_C$ . Этот случай отражает векторная диаграмма на рис. 79,б.

3.  $\dot{U}_L = \dot{U}_C$  - случай резонанса напряжений (рис. 79,в).

Условие резонанса напряжений:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (2.68)$$

При этом, как следует из (2.67) и (2.68),  $\underline{Z} = R$ ;  $\varphi = 0$ .

При резонансе напряжений или режимах, близких к нему, ток в цепи резко возрастает. В теоретическом случае при  $R=0$  его величина стремится к бесконечности. Соответственно возрастанию тока увеличиваются напряжения на индуктивном и емкостном элементах, которые могут во много раз превысить величину напряжения источника питания.

Пусть, например, в цепи на рис. 1  $U = 10 \text{ В}; R = 1 \text{ Ом}; X_L = X_C = 1000 \text{ Ом}$ .  
Тогда  $I = U/Z = U/R = 10 \text{ А}$ , и, соответственно,  
 $U_L = U_C = IX_L = IX_C = 10^4 \text{ В}$ .

Явление резонанса находит полезное применение на практике, в частности в радиотехнике. Однако, если он возникает стихийно, то может привести к аварийным режимам вследствие появления больших перенапряжений и сверхтоков.

Физическая сущность резонанса заключается в периодическом обмене энергией между магнитным полем катушки индуктивности и электрическим полем конденсатора, причем сумма энергий полей остается постоянной.

Суть дела не меняется, если в цепи имеется несколько индуктивных и

$$L_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n L_k;$$

емкостных элементов. Действительно, в этом случае

$1/C_{\Sigma} = \sum_{k=1}^n 1/C_k$ , и соотношение (2.68) выполняется для эквивалентных значений  $L_{\Sigma}$  и  $C_{\Sigma}$ .

Как показывает анализ уравнения (2.68), режима резонанса можно добиться путем изменения параметров  $L$  и  $C$ , а также частоты. На основании (2.68) для резонансной частоты можно записать

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (2.69)$$

**Резонансными кривыми** называются зависимости тока и напряжения от частоты. В качестве их примера на рисунке 80 приведены типовые кривые  $I(f)$ ;  $U_L(f)$  и  $U_C(f)$  для цепи на рисунке 78 при  $U = \text{const}$ .

Важной характеристикой резонансного контура является **добротность**  $Q$ , определяемая отношением напряжения на индуктивном (емкостном) элементе к входному напряжению:

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_p L}{R} = \frac{1}{\omega_p CR}, \quad (2.70)$$

- и характеризующая “избирательные” свойства резонансного контура, в частности его **полосу пропускания**  $\Delta\omega = \omega_p / Q$ .

Другим параметром резонансного контура является **характеристическое сопротивление**, связанное с добротностью соотношением

$$\rho = QR, \quad (2.71)$$

или с учетом (2.69) и (2.70) для  $\rho$  можно записать:

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.72)$$

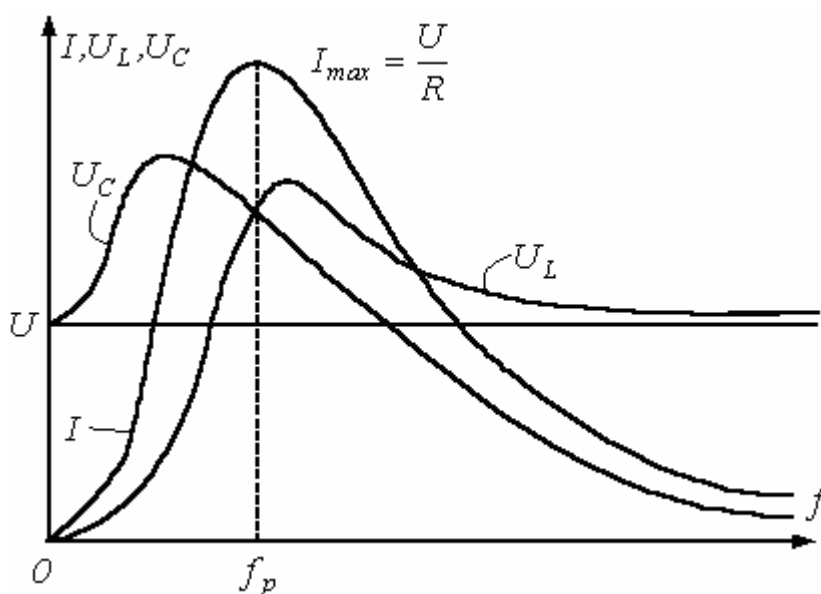


Рисунок 80 – Резонансные кривые

## Резонанс в цепи с параллельно соединенными элементами (резонанс токов)

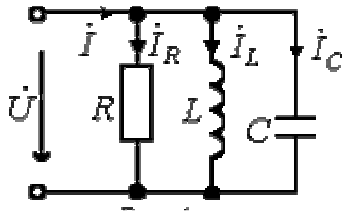


Рисунок 81 - Цепь с параллельно соединенными элементами

Для цепи рисунка 81 имеем

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U} [g + j(b_C - b_L)] = \dot{U} \underline{Y},$$

где

$$\underline{Y} = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} e^{-j\varphi}; \quad (2.72)$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g}. \quad (2.73)$$

В зависимости от соотношения величин  $b_L$  и  $b_C$ , как и в рассмотренном выше случае последовательного соединения элементов, возможны три различных случая.



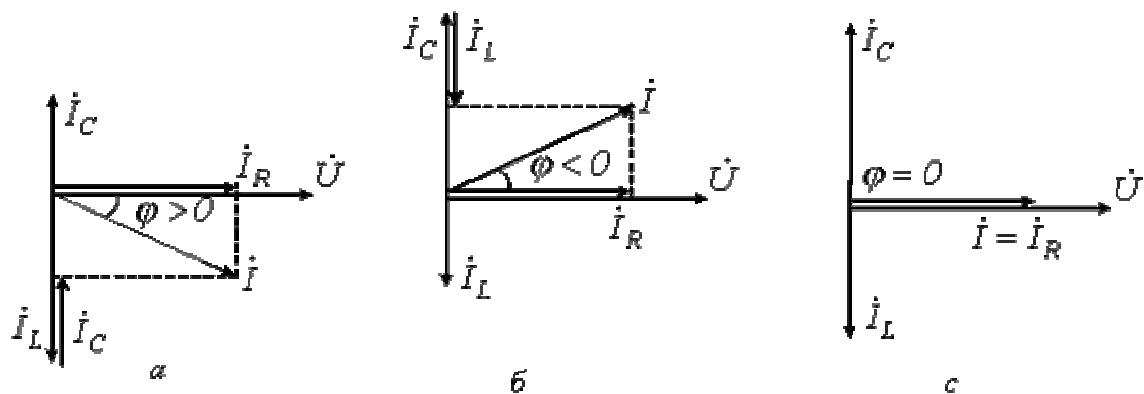


Рисунок 82 - Векторные диаграммы для цепи с параллельно соединенными элементами

В цепи преобладает индуктивность, т.е.  $b_L > b_C$ , а следовательно,  $I_L > I_C$ . Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 82,а.

В цепи преобладает емкость, т.е.  $b_L < b_C$ , а значит,  $I_L < I_C$ . Этот случай иллюстрирует векторная диаграмма на рисунке 82,б.

$I_L = I_C$  - случай резонанса токов (рисунок 82,в).

Условие резонанса токов  $b_L = b_C$  или

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C \quad (2.74)$$

При этом, как следует из (2.72) и (2.73),  $\underline{Y} = g = 1/R; \varphi = 0$ . Таким образом, при резонансе токов входная проводимость цепи минимальна, а входное сопротивление, наоборот, максимально. В частности при отсутствии в цепи на рисунок 81 резистора R ее входное сопротивление в режиме резонанса стремится к бесконечности, т.е. при резонансе токов ток на входе цепи минимален.

Идентичность соотношений (2.68) и (2.70) указывает, что в обоих случаях резонансная частота определяется соотношением (2.69). Однако не следует использовать выражение (2.69) для любой резонансной цепи. Оно справедливо только для простейших схем с последовательным или параллельным соединением индуктивного и емкостного элементов.

При определении резонансной частоты в цепи произвольной конфигурации или, в общем случае, соотношения параметров схемы в режиме резонанса следует исходить из условия вещественности входного сопротивления (входной проводимости) цепи.

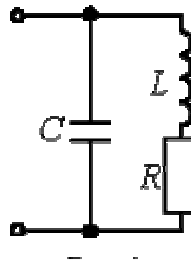


Рисунок 83 – Цепь произвольной конфигурации

Например, для цепи на рисунке 83 имеем

$$\underline{Y} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)$$

Поскольку в режиме резонанса мнимая часть  $\underline{Y}$  должна быть равна нулю, то условие резонанса имеет вид:

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega_p^2 L^2},$$

откуда, в частности, находится резонансная частота.

### Резонанс в сложной цепи

Условие резонанса для сложной цепи со смешанным соединением нескольких индуктивных и емкостных элементов, заключающееся в равенстве нулю мнимой части входного сопротивления ( $X(\omega) = 0$ ) или входной проводимости ( $b(\omega) = 0$ ), определяет наличие у соответствующих

этому условию уравнений относительно  $\omega$  нескольких вещественных корней, т.е. таким цепям соответствует несколько резонансных частот.

При определении резонансных частот для реактивного двухполюсника аналитическое выражение его входного реактивного сопротивления  $X(\omega)$  или входной реактивной проводимости  $b(\omega)$  следует представить в виде отношения двух полиномов по степеням  $\omega$ , т.е.  $X(\omega) = P(\omega)/Q(\omega)$  или  $b(\omega) = Q(\omega)/P(\omega)$ .

Тогда корни уравнения  $P(\omega) = 0$  дадут значения частот, которые соответствуют резонансам напряжений, а корни уравнения  $Q(\omega) = 0$  – значения частот, при которых возникают резонансы токов. Общее число резонансных частот в цепи на единицу меньше количества индуктивных и емкостных элементов в схеме, получаемой из исходной путем ее сведения к цепи (с помощью эквивалентных преобразований) с минимальным числом этих элементов. Характерным при этом является тот факт, что режимы резонансов напряжений и токов чередуются.

В качестве примера определим резонансные частоты для цепи рисунок 84.

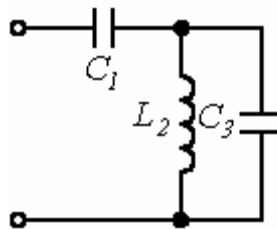


Рисунок 84 – Разветвленная цепь

Выражение входного сопротивления данной цепи имеет вид

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_2 \frac{1}{j\omega C_3}}{j\omega L_2 + \frac{1}{j\omega C_3}} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_3} = \frac{1 - \omega^2 (L_2 C_3 + L_2 C_1)}{j\omega C_1 (1 - \omega^2 L_2 C_3)} = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)}.$$

Из решения уравнения  $P(\omega) = 0$  получаем частоту  $\omega_1 = 1/\sqrt{L_2(C_1 + C_3)}$ , соответствующую резонансу напряжений, а из решения уравнения  $Q(\omega) = 0$  - частоту  $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_3}$ , соответствующую резонансу токов.

### Контрольные вопросы

1. Что такое резонанс напряжений, чем он характеризуется?
2. Что такое резонанс токов, чем он характеризуется?
3. В чем физическая сущность резонансных режимов?
4. На основании каких условий в общем случае определяются резонансные частоты?

## 2.6 Векторные и топографические диаграммы

Совокупность радиус-векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения, токи и т. д., называется **векторной диаграммой**. Векторные диаграммы наглядно иллюстрируют ход решения задачи. При точном построении векторов можно непосредственно из диаграммы определить амплитуды и фазы искомых величин. Приближенное (качественное) построение диаграмм при аналитическом решении служит надежным контролем корректности хода решения и позволяет легко определить квадрант, в котором находятся определяемые векторы.

При построении векторных диаграмм для цепей с последовательным соединением элементов за базовый (отправной) вектор следует принимать вектор тока, а к нему под соответствующими углами подстраивать векторы напряжений на отдельных элементах. Для цепей с параллельным соединением элементов за базовый (отправной) вектор следует принять вектор напряжения, ориентируя относительно него векторы токов в параллельных ветвях.

Для наглядного определения величины и фазы напряжения между различными точками электрической цепи удобно использовать **топографические диаграммы**. Они представляют собой соединенные соответственно схеме электрической цепи точки на комплексной плоскости, отображающие их потенциалы. На топографической диаграмме, представляющей собой в принципе векторную диаграмму, порядок расположения векторов напряжений строго соответствует порядку расположения элементов в схеме, а вектор падения напряжения на каждом

последующем элементе примыкает к концу вектора напряжения на каждом предыдущем элементе.

В качестве примера построим векторную диаграмму токов, а также топографическую диаграмму потенциалов для схемы по рисунку 85.

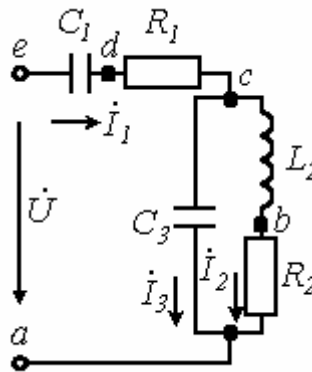


Рисунок 85 – Расчетная схема

Параметры схемы:  $X_{C1} = 100 \text{ Ом}; X_{L2} = X_{C3} = 50 \text{ Ом}; R_1 = 25 \text{ Ом}; R_2 = 20 \text{ Ом}.$

При данных параметрах и заданном напряжении на входе схемы  $\dot{U} = 120e^{j0} \text{ В}$  найденные значения токов равны:  $\dot{I}_1 = 0,4 + j0,4 \text{ (А)};$   
 $\dot{I}_2 = 1 - j \text{ (А)}; \dot{I}_3 = -0,6 + j1,4 \text{ (А)}.$

При построении векторной диаграммы зададимся масштабами токов и напряжений. Векторную диаграмму можно строить, имея запись комплекса в показательной форме, т.е. по значениям модуля и фазы. Однако на практике удобнее проводить построения, используя алгебраическую форму записи, поскольку при этом вещественная и мнимая составляющие комплексной величины непосредственно откладываются на соответствующих осях комплексной плоскости, определяя положение точки на ней.

Построение векторной диаграммы токов осуществляется непосредственно на основании известных значений их комплексов. Для построения топографической диаграммы предварительно осуществим расчет комплексных потенциалов (другой вариант построения топографической диаграммы предполагает расчет комплексов напряжений на элементах цепи с

последующим суммированием векторов напряжений вдоль контура непосредственно на комплексной плоскости).

При построении топографической диаграммы обход контуров можно производить по направлению тока или против. Чаще используют второй вариант.

В этом случае с учетом того, что в электротехнике принято, что ток течет от большего потенциала к меньшему, потенциал искомой точки равен потенциалу предыдущей плюс падение напряжения на элементе между этими точками. Если на пути обхода встречается источник ЭДС, то потенциал искомой точки будет равен потенциалу предыдущей плюс величина этой ЭДС, если направление обхода совпадает с направлением ЭДС, и минус величина ЭДС, если не совпадает. Это вытекает из того, что напряжение на источнике ЭДС имеет направление, противоположное ЭДС.

Обозначив на схеме по рисунку 85 точки между элементами цепи *e* и *a* и приняв потенциал точки *a* за нуль ( $\phi_a = 0$ ), определим потенциалы этих точек:

$$\phi_b = \phi_a + \dot{I}_2 R_2 = 0 + (1 - j) \cdot 20 = 20 - j20 \text{ (В)};$$

$$\phi_c = \phi_b + jX_{L2} \dot{I}_2 = 20 - j20 + (1 - j) \cdot j50 = 70 + j30 \text{ (В)}$$

или  $\phi_c = \phi_a - jX_{C3} \dot{I}_3 = 0 - j50(-0,6 + j1,4) = 70 + j30 \text{ (В)};$

$$\phi_d = \phi_c + \dot{I}_1 R_1 = 70 + j30 + (0,4 + j0,4) \cdot 25 = 80 + j40 \text{ (В)};$$

$$\phi_e = \phi_d - jX_{C1} \dot{I}_1 = 80 + j40 - j40(0,4 + j0,4) = 120 \text{ (В)}.$$

Таким образом, в результате проведенных вычислений получено, что  $\phi_e - \phi_a = 120 \text{ В}$ . Но разность потенциалов точек *e* и *a* равно напряжению *U*, приложенному к цепи, а оно равно 120 В. Таким образом, второй закон Кирхгофа выполняется, а следовательно, вычисления выполнены верно. В соответствии с полученными результатами строится топографическая диаграмма на рисунке 86. Следует обратить внимание на ориентацию векторов, составляющих топографическую диаграмму, относительно векторов тока: для резистивных элементов соответствующие векторы параллельны, для индуктивного и емкостных – ортогональны.



неизменности токов в ветвях участков схемы, не затронутых этими преобразованиями. Из последнего вытекает, что, если преобразованию подвергаются участки цепи, не содержащие источников энергии, то мощности в исходной и эквивалентной схемах одинаковы. Если в преобразуемые участки входят источники энергии, то в общем случае мощности в исходной и преобразованной цепях будут различны.

Рассмотрим наиболее важные случаи преобразования электрических цепей.

### Преобразование последовательно соединенных элементов

Рассмотрим участок цепи на рисунке 87,а. При расчете внешней по отношению к этому участку цепи данную ветвь можно свести к виду на рисунке 87,б, где

$$\underline{Z}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \quad (2.75)$$

или

$$\dot{E} = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \quad (2.76)$$

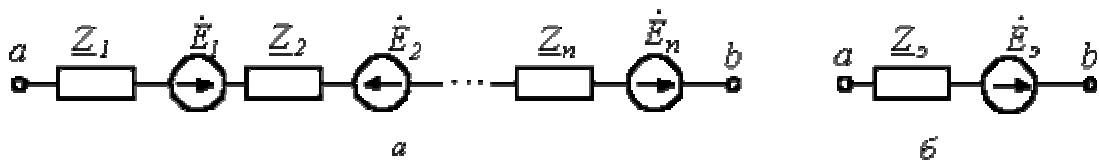


Рисунок 87 – Преобразование последовательного соединения

При этом при вычислении эквивалентной ЭДС  $\dot{E}_k$  k-я ЭДС берется со знаком “+”, если ее направление совпадает с направлением эквивалентной ЭДС, и “-”, если не совпадает.



## Преобразование параллельно соединенных ветвей

Пусть имеем схему на рисунке 88,а.

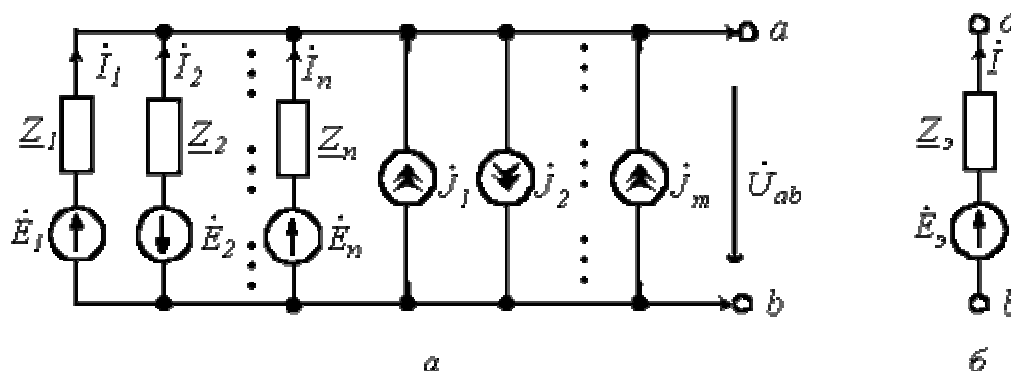


Рисунок 88- Преобразование параллельного соединения ветвей

Согласно закону Ома для участка цепи с источником ЭДС

$$\dot{I}_k = \dot{E}_k \underline{Y}_k - \dot{U}_{ab} \underline{Y}_k,$$

где  $\underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_k$ .

Тогда

$$\dot{I} = \sum_{k=1}^n \dot{E}_k \underline{Y}_k - \dot{U}_{ab} \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k + \sum_{i=1}^m \dot{J}_i = \dot{E}_\Sigma \underline{Y}_\Sigma - \dot{U}_{ab} \underline{Y}_\Sigma,$$

$$\text{где } \underline{Y}_\Sigma = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = 1/\underline{Z}_\Sigma; \quad (2.77)$$

$$\dot{E}_\Sigma = \frac{\sum_{k=1}^n \dot{E}_k \underline{Y}_k + \sum_{i=1}^m \dot{J}_i}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k}, \quad (2.78)$$

причем со знаком “+” в (4) записываются ЭДС  $\dot{E}_k$  и ток  $\dot{J}_i$ , если они направлены к тому же узлу, что и ЭДС  $\dot{E}_2$ ; в противном случае они записываются со знаком “-”.

### Взаимные преобразования “треугольник-звезда”

В ряде случаев могут встретиться схемы, соединения в которых нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному типу (см. рисунок 89). В таких случаях преобразования носят более сложный характер: преобразование треугольника в звезду и наоборот.

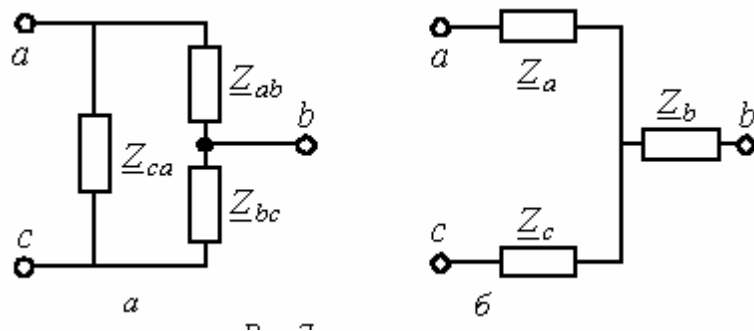


Рисунок 89 – Схемы соединения сопротивлений:

а) треугольник; б) звезда.

Преобразовать треугольник в звезду – значит заменить три сопротивления, соединенных в треугольник между какими-то тремя узлами, другими тремя сопротивлениями, соединенными в звезду между теми же точками. При этом на участках схемы, не затронутых этими преобразованиями, токи должны остаться неизменными.

Без вывода запишем формулы эквивалентных преобразований

Треугольник  $\rightarrow$  звезда

Звезда  $\rightarrow$  треугольник

$$\underline{Z}_a = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{Z}_{ab}\underline{Z}_{bc}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{Z}_{bc}\underline{Z}_{ca}}{\underline{Z}_{ab} + \underline{Z}_{bc} + \underline{Z}_{ca}};$$

$$\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \frac{\underline{Z}_a\underline{Z}_b}{\underline{Z}_c};$$

$$\underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_b + \underline{Z}_c + \frac{\underline{Z}_b\underline{Z}_c}{\underline{Z}_a};$$

$$\underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_c + \underline{Z}_a + \frac{\underline{Z}_c\underline{Z}_a}{\underline{Z}_b}.$$

### Контрольные вопросы

1. Что представляют собой векторные диаграммы?
2. Что такое топографические диаграммы, для чего они служат?
3. В чем сходство и различие топографической и потенциальной диаграмм?
4. Какой практический смысл преобразований электрических цепей?
5. В чем заключается принцип эквивалентности преобразований?

### 2.7 Анализ цепей с индуктивно связанными элементами

Электрические цепи могут содержать элементы, индуктивно связанные друг с другом. Такие элементы могут связывать цепи, электрически (гальванически) разделенные друг от друга.

В том случае, когда изменение тока в одном из элементов цепи приводит к появлению ЭДС в другом элементе цепи, говорят, что эти два элемента **индуктивно связаны**, а возникающую ЭДС называют **ЭДС взаимной индукции**. Степень индуктивной связи элементов характеризуется коэффициентом связи

$$\kappa = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad (2.79)$$

где  $M$  – взаимная индуктивность элементов цепи (размерность – Гн);

$L_1$  и  $L_2$  – собственные индуктивности этих элементов.

Следует отметить, что всегда  $\kappa < 1$ .

Пусть имеем две соосные катушки в общем случае с ферромагнитным сердечником (см. рисунок 90). На рисунке 90 схематично показана картина магнитного поля при наличии тока  $i_1$  в первой катушке (направление силовых линий магнитного потока определяется по правилу правого буравчика). Витки первой катушки сцеплены с **магнитным потоком самоиндукции  $\Phi_{11}$** , а витки второй катушки – с **магнитным потоком взаимной индукции  $\Phi_{21}$** , который отличается от  $\Phi_{11}$  ( $\Phi_{21} < \Phi_{11}$ ) за счет потоков рассеяния.

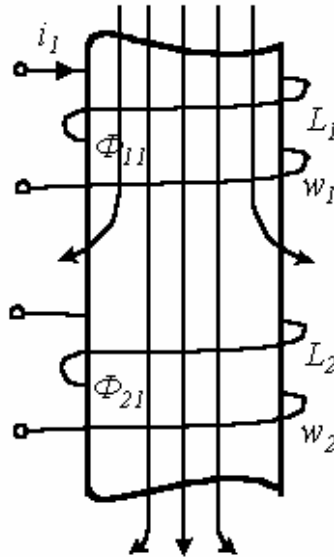


Рисунок 90 – Магнитосвязанные катушки

По определению

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{i_1} = \frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1} ; \quad (2.80)$$

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1} . \quad (2.81)$$

Если теперь наоборот пропустить ток  $i_2$  по второй катушке, то соответственно получим

$$L_2 = \frac{\Psi_{22}}{i_2} = \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2} ; \quad (2.82)$$

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2} . \quad (2.83)$$

При этом

$$M_{12} = M_{21} = M . \quad (2.84)$$

Следует отметить, что коэффициент связи мог бы быть равным 1, если бы  $\Phi_{11} = \Phi_{21}$  и  $\Phi_{22} = \Phi_{12}$ , то есть когда весь поток, создаваемый одной катушкой, полностью пронизывал бы витки другой катушки. Практически даже различные витки одной и той же катушки пронизываются разными потоками. Поэтому с учетом рассеяния  $\Phi_{11} > \Phi_{21}$  и  $\Phi_{22} > \Phi_{12}$ . В этой связи

$$\kappa^2 = \frac{\frac{w_2 \Phi_{21}}{i_1} \cdot \frac{w_1 \Phi_{12}}{i_2}}{\frac{w_1 \Phi_{11}}{i_1} \cdot \frac{w_2 \Phi_{22}}{i_2}} = \frac{\Phi_{12} \Phi_{21}}{\Phi_{11} \Phi_{22}} < 1 .$$

Рассмотрим цепь переменного тока на рисунке 91, в которую последовательно включены две катушки индуктивности  $L_1$  и  $L_2$ , индуктивно связанные друг с другом, и резистор R.

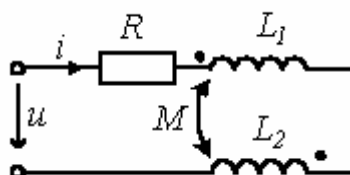


Рисунок 91 – Цепь переменного тока с индуктивно связанными катушками

При изменении тока  $i$  в цепи в катушках индуцируются ЭДС само- и взаимной индукции. При этом ЭДС взаимной индукции должна по закону Ленца иметь такое направление, чтобы препятствовать изменению потока взаимной индукции.

Тогда, если в цепи протекает гармонически изменяющийся ток  $i = I_m \sin \omega t$ , то в первой катушке индуцируется ЭДС

$$e_1 = -L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = -(\omega L_1 + \omega M) I_m \cos \omega t, \quad (2.85)$$

а во второй –

$$e_2 = -L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} = -(\omega L_2 + \omega M) I_m \cos \omega t. \quad (2.86)$$

Катушки можно включить так, что ЭДС самоиндукции будет суммироваться с ЭДС взаимной индукции; при переключении одной из катушек ЭДС взаимной индукции будет вычитаться из ЭДС самоиндукции. Один из зажимов каждой катушки на схеме помечают, например точкой или звездочкой. Этот знак означает, что при увеличении, например, тока в первой катушке, протекающего от точки, во второй катушке индуцируется ЭДС взаимной индукции, действующая от другого конца к точке. Различают **согласное** и **встречное включения** катушек. При согласном включении токи в катушках одинаково ориентированы по отношению к их одноименным зажимам. При этом ЭДС само- и взаимной индукции складываются – случай, показанный на рисунке 91. При встречном включении катушек токи ориентированы относительно одноименных зажимов различно. В этом случае ЭДС само- и взаимной индукции вычитаются. Таким образом, тип включения катушек (согласное или встречное) определяются совместно способом намотки катушек и направлении токов в них.

Перейдя к комплексной форме записи (2.85) и (2.86), получим

$$\dot{E}_1 = -j\omega L_1 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = -jX_{L1} \dot{I} - jX_M \dot{I} = \dot{E}_{1L} + \dot{E}_{1M}; \quad (2.87)$$

$$\dot{E}_2 = -j\omega L_2 \dot{I} - j\omega M \dot{I} = -jX_{L2} \dot{I} - jX_M \dot{I} = \dot{E}_{2L} + \dot{E}_{2M}, \quad (2.88)$$

где  $X_M = \omega M$  – сопротивление взаимной индукции (Ом).

Для определения тока в цепи на рисунке 91 запишем

$$\dot{U} + \dot{E}_1 + \dot{E}_2 = \dot{U} + \dot{E}_{1L} + \dot{E}_{1M} + \dot{E}_{2L} + \dot{E}_{2M} = \dot{U} - j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} = R\dot{I},$$

откуда

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)}.$$

## Воздушный (линейный) трансформатор

Одним из важнейших элементов электрических цепей является трансформатор, служащий для преобразования величин токов и напряжений. В простейшем случае трансформатор состоит из двух гальванически несвязанных и неподвижных катушек без ферромагнитного сердечника. Такой трансформатор называется воздушным. Он является линейным. Наличие ферромагнитного сердечника обусловило бы нелинейные свойства трансформатора.

На рисунке 92 представлена схема замещения трансформатора, первичная обмотка которого включена на напряжение  $U_1$ , а от вторичной обмотки получает питание приемник с сопротивлением  $Z_H = R + jX_H$ .

В трансформаторе энергия из первичной цепи передается во вторичную посредством магнитного поля. Если в первичной цепи под действием напряжения источника возникает переменный ток, то во вторичной цепи за счет магнитной связи катушек индуцируется ЭДС, вызывающая протекание тока в нагрузке.

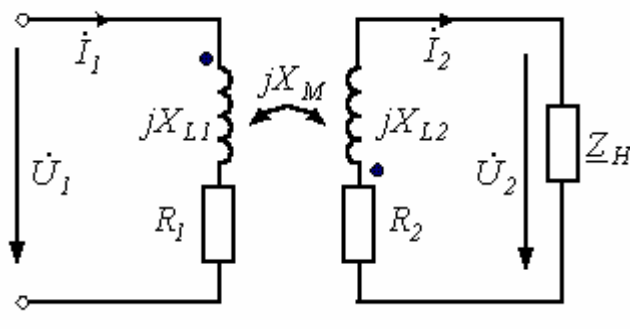


Рисунок 92 – Схема замещения трансформатора

По второму закону Кирхгофа для первичной и вторичной цепей трансформатора можно записать

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1 = R_1 \dot{I}_1 - (-jX_{L1} \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2) = (R_1 + jX_{L1}) \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{E}_2 = -jX_{L2} \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1 = \dot{I}_2 R_2 + \dot{I}_2 \underline{Z}_H.$$

Таким образом, уравнения воздушного трансформатора имеют вид:

$$\dot{U}_1 = (R_1 + jX_{L1}) \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_2; \quad (2.89)$$

$$0 = jX_M \dot{I}_1 + (R_2 + jX_{L2}) \dot{I}_2 + \dot{U}_2. \quad (2.90)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  - активные сопротивления обмоток;  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_H$ .

Если уравнения (2.89) и (2.90) решить относительно  $\dot{I}_1$ , предварительно подставив в (2.90)  $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 (R_H + jX_H)$  и обозначив  $R_{22} = R_2 + R_H$ ;  $X_{22} = X_{L2} + X_H$ , то получим

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{(R_1 + R_{BH}) + j(X_{L1} - X_{BH})}, \quad (2.91)$$

где  $R_{BH} = X_M^2 R_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$ ;  $X_{BH} = X_M^2 X_{22} / (R_{22}^2 + X_{22}^2)$  - вносимые активное и реактивное сопротивления.

Таким образом, согласно (2.91) воздушный трансформатор со стороны первичной обмотки может рассматриваться как двухполюсник с сопротивлением  $\underline{Z} = (R_1 + R_{BH}) + j(X_{L1} - X_{BH})$ .

### Баланс мощностей в цепях с индуктивно связанными элементами

Пусть имеем схему по рисунку 93,



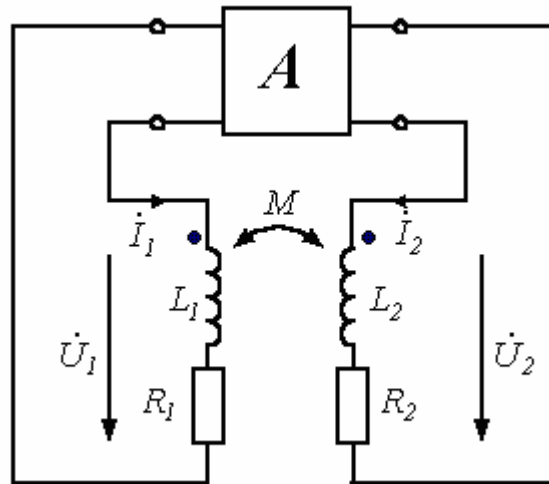


Рисунок 93 – Схема испытательного стенда

где  $A$  – некоторый активный четырехполюсник.

Для данной цепи можно записать

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + jX_M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + jX_M \dot{I}_1.$$

Обозначим токи  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  как:  $\dot{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1}$ ;  $\dot{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2}$ .

Тогда для комплексов полных мощностей первой и второй ветвей соответственно можно записать:

$$\underline{S}_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* = R_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^* + j\omega L_1 \dot{I}_1 \dot{I}_1^* + j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* = R_1 I_1^2 + j\omega L_1 I_1^2 + j\omega M \dot{I}_2 \dot{I}_1^* ;$$

$$\underline{S}_2 = \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = R_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^* + j\omega L_2 \dot{I}_2 \dot{I}_2^* + j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* = R_2 I_2^2 + j\omega L_2 I_2^2 + j\omega M \dot{I}_1 \dot{I}_2^* .$$

Рассмотрим в этих уравнениях члены со взаимной индуктивностью:

$$\begin{aligned}\Delta \underline{S}_{1M} &= j\omega M \dot{I}_2^* I_1 = \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1 + \psi_2\right)} = \omega M I_1 I_2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right) + \right. \\ &\left. + j \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi_{12}\right) \right] = \omega M I_1 I_2 \sin \psi_{12} + j \omega M I_1 I_2 \cos \psi_{12} = \Delta P_{1M} + j \Delta Q_{1M};\end{aligned}\quad (2.92)$$

$$\begin{aligned}\Delta \underline{S}_{2M} &= j\omega M \dot{I}_1^* I_2 = \omega M I_1 I_2 e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \psi_1 - \psi_2\right)} = \omega M I_1 I_2 \left[ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_{12}\right) + \right. \\ &\left. + j \sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi_{12}\right) \right] = -\omega M I_1 I_2 \sin \psi_{12} + j \omega M I_1 I_2 \cos \psi_{12} = -\Delta P_{2M} + j \Delta Q_{2M},\end{aligned}\quad (2.93)$$

где  $\psi_{12} = \psi_1 - \psi_2$ .

Из (2.92) и (2.93) вытекает, что

$$\Delta P_{1M} = -\Delta P_{2M}; \quad (2.94)$$

$$\Delta Q_{1M} = \Delta Q_{2M}. \quad (2.95)$$

Соотношение (2.95) показывает, что активная мощность передается от первой катушки ко второй. При этом суммарная реактивная мощность, обусловленная взаимной индукцией, равна нулю, т.к.  $\Delta P_{1M} + \Delta P_{2M} = 0$ . Это означает, что на общий баланс активной мощности цепи индуктивно связанные элементы не влияют.

Суммарная реактивная мощность, обусловленная взаимоиндукцией, равна

$$\Delta Q_{12M} = \Delta Q_{1M} + \Delta Q_{2M} = 2\omega M I_1 I_2 \cos \psi_{12}.$$

Таким образом, общее уравнение баланса мощностей с учетом индуктивно связанных элементов имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \dot{E}_k^* I_k = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k I_k^2 \pm j 2\omega \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} M_{ij} I_i I_j \cos\left(\dot{I}_i^* \dot{I}_j\right), \quad (2.96)$$

где знак “+” ставится при согласном включении катушек,

а “-” – при встречном.

Расчет разветвленных цепей при наличии взаимной индуктивности может быть осуществлен путем составления уравнений по законам Кирхгофа

или методом контурных токов. Непосредственное применение метода узловых потенциалов для расчета таких цепей неприемлемо, поскольку в этом случае ток в ветви зависит также от токов других ветвей, которые наводят ЭДС взаимной индукции.

В качестве примера расчета цепей с индуктивно связанными элементами составим контурные уравнения для цепи на рисунке 94:

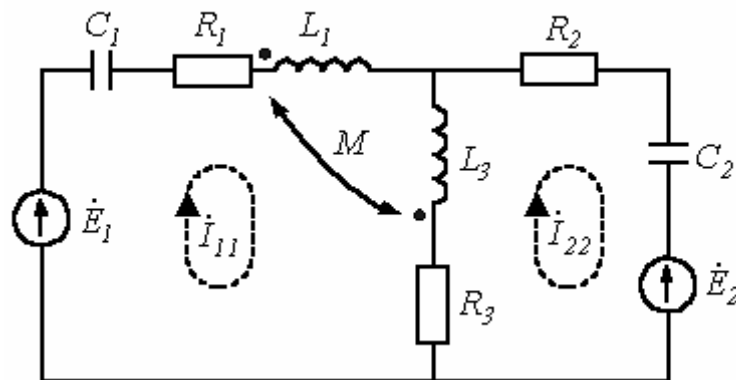


Рисунок 94 – Расчетная схема

$$\begin{aligned} \dot{I}_{11} \left( R_1 - j \frac{1}{\omega C} + j \omega L_1 + j \omega L_3 + R_3 - j 2 \omega M \right) - \dot{I}_{22} (j \omega L_3 + R_3 - j \omega M) &= \dot{E}_1; \\ - \dot{I}_{11} (j \omega L_3 + R_3 - j \omega M) + \dot{I}_{22} \left( j \omega L_3 + R_3 - j \frac{1}{\omega C} + R_2 \right) &= - \dot{E}_2. \end{aligned}$$

Чтобы обойти указанное выше ограничение в отношении применения метода узловых потенциалов для расчета рассматриваемых схем можно использовать эквивалентные преобразования, которые иллюстрируют схемы на рисунке 95, где цепь на рисунке 95,б эквивалентна цепи на рисунке 95,а. При этом верхние знаки ставятся при согласном включении катушек, а нижние – при встречном.

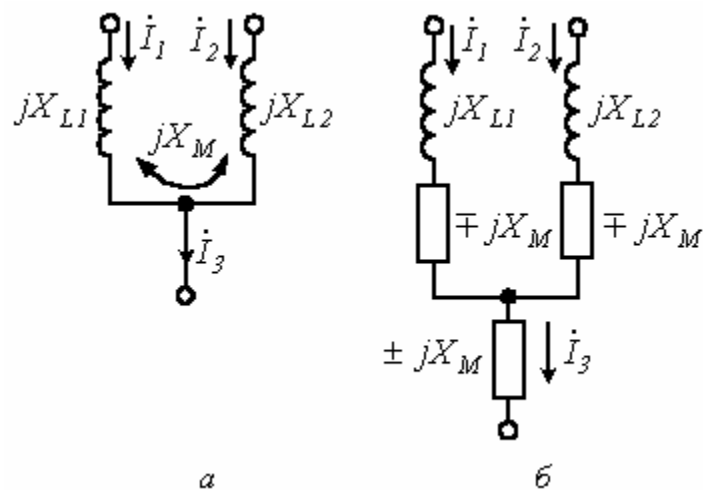


Рисунок 95 - Схема эквивалентных преобразований

### Контрольные вопросы

1. Какие элементы называются индуктивно связанными?
2. Что такое коэффициент связи, и в каких пределах он изменяется?
3. Что такое воздушный трансформатор? Почему он называется линейным?
4. Запишите уравнения воздушного трансформатора, нарисуйте его схему замещения.
5. Как влияют индуктивно связанные элементы на баланс мощностей?
6. Какие методы расчета можно использовать для анализа цепей с индуктивно связанными элементами?

## 2.8 Особенности составления матричных уравнений при наличии индуктивных связей и ветвей с идеальными источниками

### Матрицы сопротивлений и проводимостей для цепей со взаимной индукцией

Для схем, не содержащих индуктивно связанные элементы, матрицы сопротивлений и проводимостей ветвей являются диагональными, т.е. все их элементы, за исключением стоящих на главной диагонали, равны нулю.

В общем случае разветвленной цепи со взаимной индукцией матрица сопротивлений ветвей имеет вид:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \cdots & \underline{Z}_{1n} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \cdots & \underline{Z}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{Z}_{n1} & \underline{Z}_{n2} & \cdots & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Здесь элементы главной диагонали  $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}, \dots, \underline{Z}_{nn}$  – комплексные сопротивления ветвей схемы; элементы вне главной диагонали  $\underline{Z}_{ik} = \underline{Z}_{ki} = \pm j\omega M_{ik}$  – комплексные сопротивления индуктивной связи  $i$ -й и  $k$ -й ветвей (знак “+” ставится при одинаковой ориентации ветвей относительно одноименных зажимов, в противном случае ставится знак “-”).

Матрица проводимостей ветвей в цепях со взаимной индукцией определяется согласно

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}.$$

Зная матрицы  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Y}$ , можно составить контурные уравнения, а также узловые, т.е. в матричной форме метод узловых потенциалов распространяется на анализ цепей с индуктивно связанными элементами.

Следует отметить, что обычно не все ветви схемы индуктивно связаны между собой. В этом случае с помощью соответствующей нумерации ветвей графа матрице  $\mathbf{Z}$  целесообразно придать квазидиагональную форму

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & & & \\ & \underline{Z}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix},$$

что облегчает ее обращение, поскольку

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & & & \\ & \underline{Z}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11}^{-1} & & & \\ & \underline{Z}_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underline{Z}_{nn}^{-1} \end{bmatrix},$$

где подматрицы  $\underline{Z}_{11}, \underline{Z}_{22}, \dots, \underline{Z}_{nn}$  могут быть квадратными диагональными или недиагональными.

В качестве примера составим матрицы  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  для схемы на рисунке 96,а, граф которой приведен на рисунке 96,б.

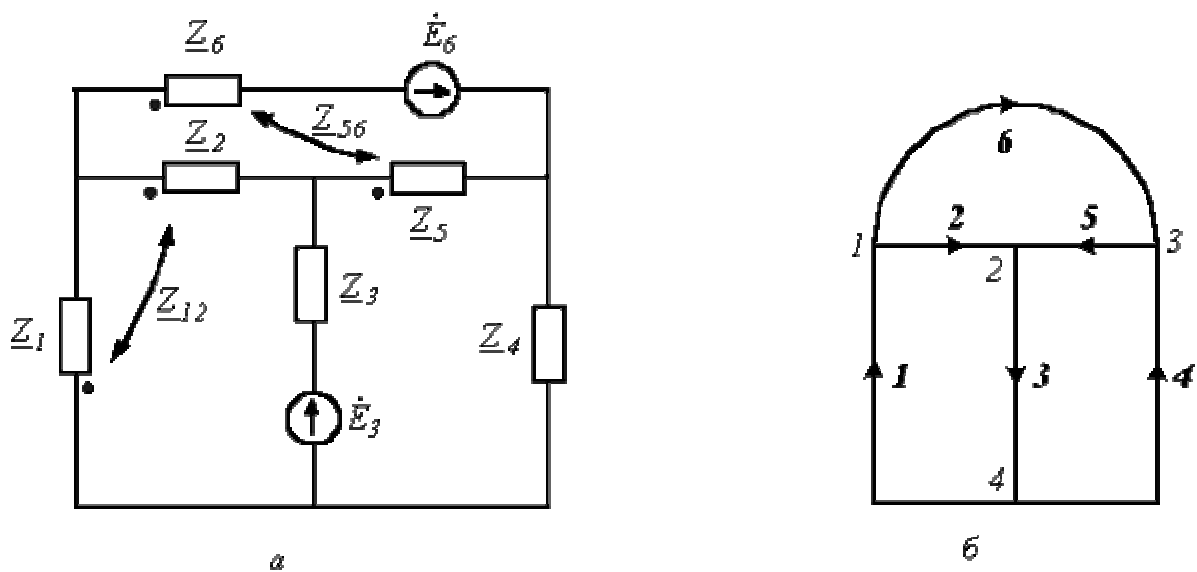


Рисунок 96 –Расчетная схема и ее граф

Для принятой нумерации ветвей матрица сопротивлений ветвей

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & & & & \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_2 & & & & \\ & & \underline{Z}_3 & & & \\ & & & \underline{Z}_4 & & \\ & & & & \underline{Z}_5 & \underline{Z}_{56} \\ & & & & \underline{Z}_{65} & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}.$$

В этой матрице можно выделить три подматрицы, обращая которые, получим

$$\mathbf{Z}^{-1}_{11} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{12} \underline{Z}_{21}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_2 & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Z}^{-1}_{22} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_3 \\ \underline{Y}_4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Z}^{-1}_{33} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_5 & \underline{Z}_{56} \\ \underline{Z}_{65} & \underline{Z}_6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underline{Z}_5 \underline{Z}_6 - \underline{Z}_{56} \underline{Z}_{65}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_6 & -\underline{Z}_{56} \\ -\underline{Z}_{65} & \underline{Z}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_5 & \underline{Y}_{56} \\ \underline{Y}_{65} & \underline{Y}_6 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица проводимостей ветвей

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & \underline{Y}_{12} & & & & \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_2 & & & & \\ & & \underline{Y}_3 & & & \\ & & & \underline{Y}_4 & & \\ & & & & \underline{Y}_5 & \underline{Y}_{56} \\ & & & & \underline{Y}_{65} & \underline{Y}_6 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при принятой ориентации ветвей  $\underline{Z}_{12} = j\omega M_{12}$  и  $\underline{Z}_{56} = -j\omega M_{56}$ .

В качестве примера матричного расчета цепей с индуктивными связями запишем контурные уравнения в матричной форме для цепи рисунка 97,а.

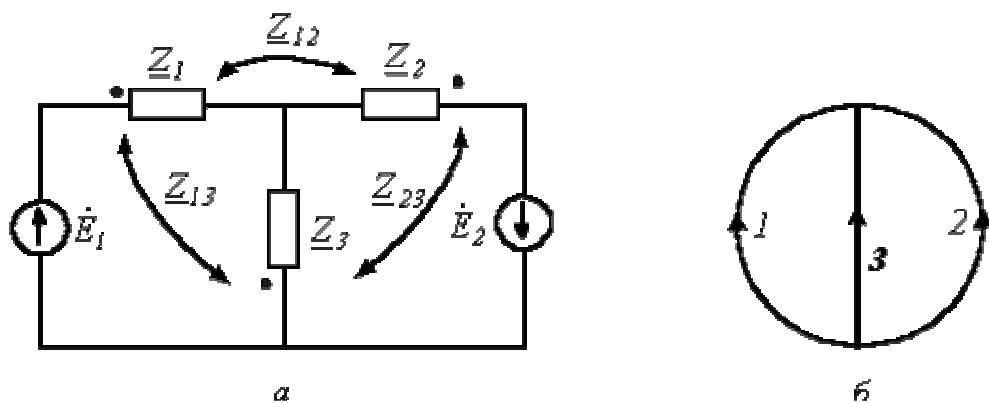


Рисунок 97 –Расчетная схема и ее граф

### Решение

1. Для заданной цепи составим граф (см. рисунок 97,б), выделив в нем дерево, образованное ветвью 3.

Тогда матрица главных контуров имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Запишем матрицу сопротивлений ветвей с учетом их принятой ориентации

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_3 \end{bmatrix}.$$

3. Определим матрицу контурных сопротивлений

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{BZB}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 & \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_{13} \\ \underline{Z}_{12} & \underline{Z}_2 & \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} =$$



$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 - \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_3 \\ \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} & \underline{Z}_2 - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_{23} - \underline{Z}_3 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{13} & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{23} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4. Запишем столбцовую матрицу контурных ЭДС

$$\dot{\mathbf{E}}_k = \mathbf{B}\dot{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{E}_1 & -\dot{E}_2 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 \end{bmatrix}.$$

5. Подставив найденные выражения в  $\underline{\mathbf{Z}}_k \dot{\mathbf{I}}_k = \dot{\mathbf{E}}_k$ , окончательно получим

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{13} & \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} \\ \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23} & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 - 2\underline{Z}_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 \end{bmatrix}.$$

### Составление матричных соотношений при наличии ветвей с идеальными источниками

В цепи могут иметь место ветви, содержащие только идеальные источники ЭДС или тока. При записи уравнений без использования матричных соотношений такие ветви не вносят каких-либо особенностей в их составление. Однако, если уравнения записываются по второму закону Кирхгофа в матричной форме или используется матричная форма контурных уравнений, то в матрице сопротивлений ветвей  $\mathbf{Z}$  ветвям, содержащим идеальные источники тока, будут соответствовать диагональные элементы  $\underline{Z}_k = \infty$ . Поэтому при наличии таких ветвей исходная схема перед составлением уравнений должна быть подвергнута соответствующему преобразованию, иллюстрируемому рисунком 98.

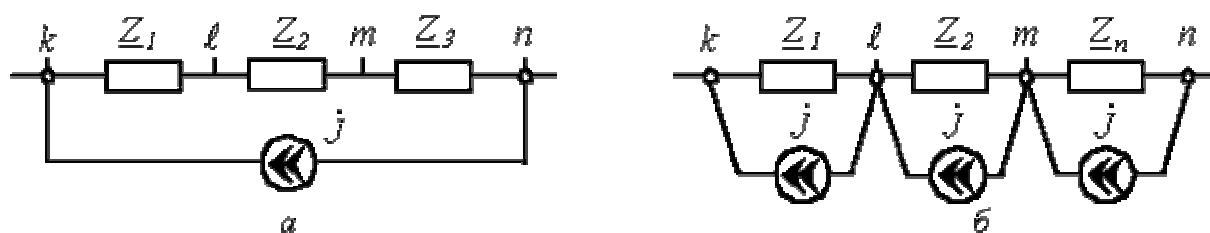


Рисунок 98 – Схема эквивалентных преобразований

Здесь идеальный источник тока  $\dot{j}$  (см. рисунок 98,а) включен между узлами **k** и **n**. Подключение к узлам **l** и **m** по два одинаковых по величине и противоположно направленных источника тока  $\dot{j}$  (см. рисунок 98,б) не влияет на режим работы цепи, что указывает на эквивалентность замены исходной цепи на рисунке 98,а схемой на рисунке 98,б.

Может быть другой случай, когда уравнения в матричной форме записываются по первому закону Кирхгофа или используется матричная форма узловых уравнений, а в цепи имеют место ветви, содержащие только идеальные источники ЭДС. Для таких ветвей соответствующие им диагональные элементы матрицы **Y** будут равны  $\infty$ . Поэтому при наличии таких ветвей исходную схему перед составлением уравнений необходимо подвергнуть преобразованию, поясняемому рисунком 99.

Здесь участок исходной цепи (см. рисунок 98,а) содержит ветвь с идеальным источником ЭДС  $\dot{E}$ . Включение в каждую ветвь, соединенную с узлом **n**, источника с ЭДС, равной  $\dot{E}$ , и направлением действия, указанным на рисунке 98,б, позволяет (в силу того, что  $\phi_l = \phi_1 = \phi_j = \phi_s$ ) трансформировать исходную цепь в схему, представленную на рисунке 98,в.

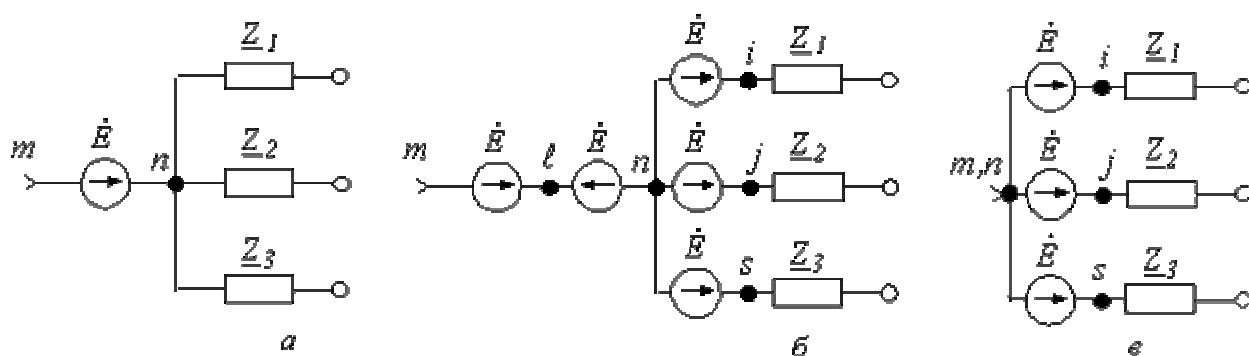


Рисунок 98 – Схемы эквивалентных преобразований

## Контрольные вопросы

1. В чем отличие матриц сопротивлений и проводимостей ветвей для цепей с отсутствием и наличием индуктивных связей?
2. В чем заключается особенность нумерации ветвей графа при наличии индуктивных связей?
3. Какие особенности имеют место при составлении матричных соотношений для цепей, содержащих ветви с идеальными источниками?

## 2.9 Методы расчета, основанные на свойствах линейных цепей

Выбор того или иного метода расчета электрической цепи в конечном итоге определяется целью решаемой задачи. Поэтому анализ линейной цепи не обязательно должен осуществляться с помощью таких общих методов расчета, как метод контурных токов или узловых потенциалов. Ниже будут рассмотрены методы, основанные на свойствах линейных электрических цепей и позволяющие при определенных постановках задач решить их более экономично.

### Метод наложения

Данный метод справедлив только для линейных электрических цепей и является особенно эффективным, когда требуется вычислить токи для различных значений ЭДС и токов источников в то время, как сопротивления схемы остаются неизменными.

Данный метод основан на **принципе наложения (суперпозиции)**, который формулируется следующим образом: ток в  $k$  – й ветви линейной электрической цепи равен алгебраической сумме токов, вызываемых каждым из источников в отдельности.

Аналитически принцип наложения для цепи, содержащей  $n$  источников ЭДС и  $m$  источников тока, выражается соотношением

$$\dot{I}_k = \underline{Y}_{k1}\dot{E}_1 + \underline{Y}_{k2}\dot{E}_2 + \dots + \underline{Y}_{kn}\dot{E}_n + \underline{K}_{k1}\dot{J}_1 + \underline{K}_{k2}\dot{J}_2 + \dots + \underline{K}_{km}\dot{J}_m. \quad (2.97)$$

Здесь  $\underline{Y}_{ki}$  – **комплекс входной проводимости**  $k$  – й ветви, численно равный отношению тока к ЭДС в этой ветви при равных нулю ЭДС в остальных ветвях;  $\underline{K}_{ki}$  – **комплекс взаимной проводимости**  $k$  – й и  $i$ – й ветвей,

численно равный отношению тока в  $k$  – й ветви и ЭДС в  $i$ – й ветви при равных нулю ЭДС в остальных ветвях.

Входные и взаимные проводимости можно определить экспериментально или аналитически, используя их указанную смысловую трактовку, при этом  $\underline{Y}_{ki} = \underline{Y}_{ik}$ , что непосредственно вытекает из свойства взаимности (см. ниже).

Аналогично определяются **коэффициенты передачи тока**  $\underline{K}_{ki}$ , которые в отличие от проводимостей являются величинами безразмерными.

Доказательство принципа наложения можно осуществить на основе метода контурных токов.

Если решить систему уравнений, составленных по методу контурных токов, относительно любого контурного тока, например  $\dot{I}_i$ , то получим

$$\dot{I}_i = \frac{\underline{D}_i}{\underline{D}} = \frac{\underline{A}_{1i}}{\underline{D}} \dot{E}_1 + \frac{\underline{A}_{2i}}{\underline{D}} \dot{E}_2 + \dots + \frac{\underline{A}_{ki}}{\underline{D}} \dot{E}_k, \quad (2.98)$$

где  $\underline{D} = \begin{vmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} & \dots & \underline{Z}_{1k} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} & \dots & \underline{Z}_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{Z}_{k1} & \underline{Z}_{k2} & \dots & \underline{Z}_{kk} \end{vmatrix}$  – определитель системы уравнений, составленный по методу контурных токов;  $\underline{A}_{i\ell}$  – алгебраическое дополнение определителя  $\underline{D}$ .

Каждая из ЭДС в (2.98) представляет собой алгебраическую сумму ЭДС в ветвях  $i$ -го контура. Если теперь все контурные ЭДС в (2.98) заменить алгебраическими суммами ЭДС в соответствующих ветвях, то после группировки слагаемых получится выражение для контурного тока  $\dot{I}_i$  в виде алгебраической суммы составляющих токов, вызванных каждой из ЭДС ветвей в отдельности. Поскольку систему независимых контуров всегда можно выбрать так, что рассматриваемая  $h$ -я ветвь войдет только в один  $\ell$ -й контур, т.е. контурный ток  $\dot{I}_i$  будет равен действительному току  $\dot{I}_h$   $h$ -й ветви, то принцип наложения справедлив для токов  $\dot{I}_h$  любых ветвей и, следовательно, справедливость принципа наложения доказана.

Таким образом, при определении токов ветвей при помощи **метода наложения** следует поочередно оставлять в схеме по одному источнику,

заменяя остальные их внутренними сопротивлениями, и рассчитать составляющие искомым токов в этих схемах. После этого полученные результаты для соответствующих ветвей суммируются – это и будут искомые токи в ветвях исходной цепи.

В качестве примера использования метода наложения определим ток во второй ветви схемы на рисунке 99,а.

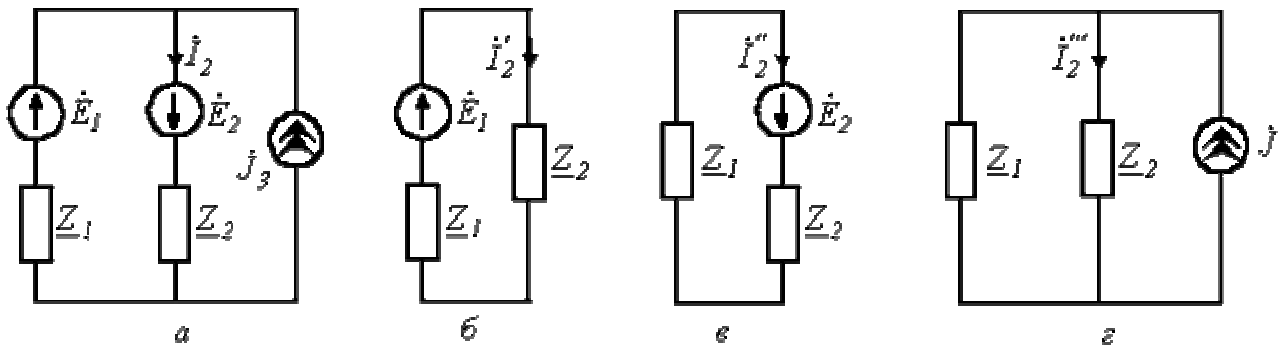


Рисунок 99 – Схемы к расчету методом наложения

Принимая источники в цепи на рисунке 99,а идеальными и учитывая, что у идеального источника ЭДС внутреннее сопротивление равно нулю, а у идеального источника тока – бесконечности, в соответствии с методом наложения приходим к расчетным схемам на рисунках 99,б...99,г.

В этих цепях

$$\dot{I}_2' = \frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{Y}_{21} \dot{E}_1; \quad \dot{I}_2'' = \frac{\dot{E}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \underline{Y}_{22} \dot{E}_2; \quad \dot{I}_2''' = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} j_3 = \underline{K}_{23} j_3,$$

где  $\underline{Y}_{21} = 1/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ ;  $\underline{Y}_{22} = 1/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ ;  $\underline{K}_{23} = \underline{Z}_1/(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)$ .

Таким образом,

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2'' + \dot{I}_2''' = \underline{Y}_{21} \dot{E}_1 + \underline{Y}_{22} \dot{E}_2 + \underline{K}_{23} j_3.$$

В качестве другого примера использования метода определим взаимные проводимости  $\underline{Y}_{13}$  и  $\underline{Y}_{23}$  в цепи на рисунке 100, если при переводе ключа в положение 1 токи в первой и второй ветвях соответственно равны  $\dot{I}'_1$  и  $\dot{I}'_2$ , а при переводе в положение 2 -  $\dot{I}''_1$  и  $\dot{I}''_2$ .

Учитывая, что в структуре пассивного четырехполюсника не содержится источников энергии, на основании принципа наложения для состояния ключа в положении “1” можно записать

$$\dot{I}'_1 = \underline{Y}_{11}\dot{E}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{E}_2 + \underline{Y}_{13}\dot{E}_3; \quad (2.99)$$

$$\dot{I}'_2 = \underline{Y}_{21}\dot{E}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{E}_2 + \underline{Y}_{23}\dot{E}_3. \quad (2.100)$$

При переводе ключа в положение “2” имеем

$$\dot{I}''_1 = \underline{Y}_{11}\dot{E}_1 + \underline{Y}_{12}\dot{E}_2; \quad (2.101)$$

$$\dot{I}''_2 = \underline{Y}_{21}\dot{E}_1 + \underline{Y}_{22}\dot{E}_2. \quad (2.102)$$

Тогда, вычитая из уравнения (2.99) соотношение (2.101), а из (2.100)-(2.102), получим

$$\dot{I}'_1 - \dot{I}''_1 = \underline{Y}_{13}\dot{E}_3;$$

$$\dot{I}'_2 - \dot{I}''_2 = \underline{Y}_{23}\dot{E}_3,$$

откуда искомые проводимости

$$\underline{Y}_{13} = \frac{\dot{I}'_1 - \dot{I}''_1}{\dot{E}_3}; \quad \underline{Y}_{23} = \frac{\dot{I}'_2 - \dot{I}''_2}{\dot{E}_3}.$$

### Принцип взаимности

Принцип взаимности основан на **теореме взаимности**, которую сформулируем без доказательства: для линейной цепи ток  $\dot{I}_k$  в  $k$  – й ветви, вызванной единственной в схеме ЭДС  $\dot{E}_i$ , находящейся в  $i$  – й ветви,

$$\dot{I}_k = \underline{Y}_{ki}\dot{E}_i$$

будет равен току  $\dot{I}_i$  в  $i$  – й ветви, вызванному ЭДС  $\dot{E}_k$ , численно равной ЭДС  $\dot{E}_i$ , находящейся в  $k$  – й ветви,

$$\dot{I}_i = \underline{Y}_{ik} \dot{E}_k.$$

Отсюда в частности вытекает указанное выше соотношение  $\underline{Y}_{ki} = \underline{Y}_{ik}$ .

Иными словами, основанный на теореме взаимности **принцип взаимности** гласит: если ЭДС  $\dot{E}$ , действуя в некоторой ветви схемы, не содержащей других источников, вызывает в другой ветви ток  $\dot{I}$  (см. рисунок 101,а), то принесенная в эту ветвь ЭДС  $\dot{E}$  вызовет в первой ветви такой же ток  $\dot{I}$  (см. рисунок 101,б).

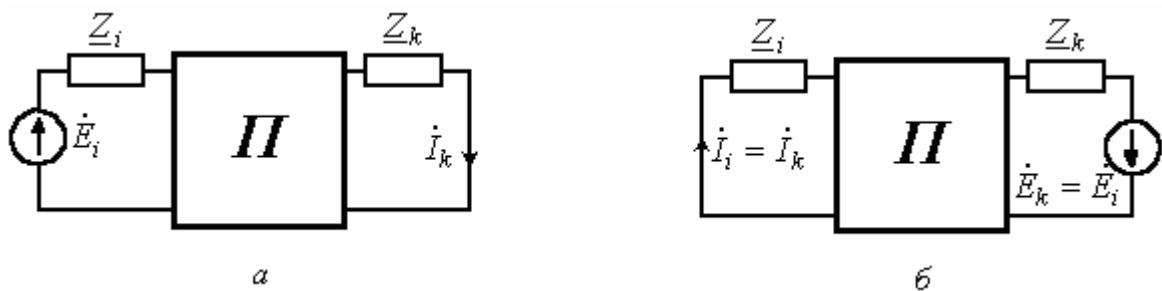


Рисунок 101 – К пояснению принципа взаимности

В качестве примера использования данного принципа рассмотрим цепь на рисунке 102,а, в которой требуется определить ток  $\dot{I}$ , вызываемый источником ЭДС  $\dot{E}$ .

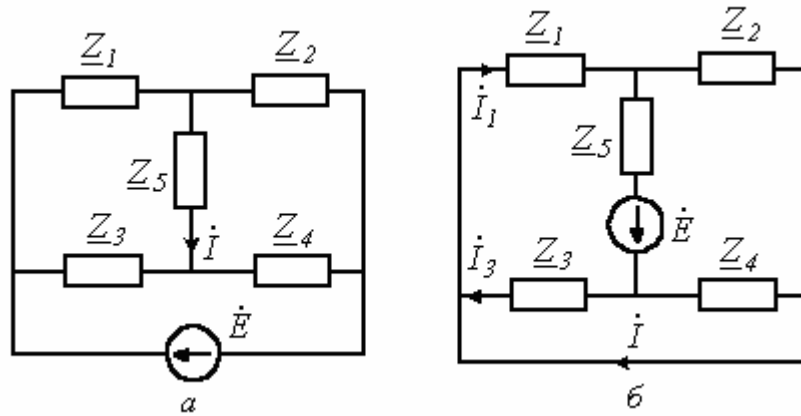


Рисунок 102 – Расчетные схемы

Перенесение источника ЭДС  $\dot{E}$  в диагональ моста, где требуется найти ток, трансформирует исходную схему в цепь с последовательно-параллельным соединением на рисунок 102,б. В этой цепи

$$\dot{i} = \dot{i}_1 - \dot{i}_3 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} \left( \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right), \quad (2.103)$$

где  $\underline{Z} = \underline{Z}_5 + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 / (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_3 \underline{Z}_4 / (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4)$ .

В соответствии с принципом взаимности ток  $\dot{i}$  в цепи на рисунке 102,а равен току, определяемому соотношением (2.103).

### Линейные соотношения в линейных электрических цепях

При изменении в линейной электрической цепи ЭДС (тока) одного из источников или сопротивления в какой-то ветви токи в любой паре ветвей  $m$  и  $n$  будут связаны между собой соотношением

$$\dot{I}_m = \underline{A} + \underline{B} \dot{I}_n, \quad (2.104)$$

где  $\underline{A}$  и  $\underline{B}$  – некоторые в общем случае комплексные константы.



Действительно, в соответствии с (2.97) при изменении ЭДС  $\dot{E}_k$  в  $k$  – й ветви для тока в  $m$  – й ветви можно записать

$$\dot{I}_m = \underline{Y}_{mk} \dot{E}_k + \underline{A}_m \quad (2.105)$$

и для тока в  $n$  – й ветви –

$$\dot{I}_n = \underline{Y}_{nk} \dot{E}_k + \underline{A}_n \quad (2.106)$$

Здесь  $\underline{A}_m$  и  $\underline{A}_n$  – составляющие токов соответственно в  $m$  – й и  $n$  – й ветвях, обусловленные всеми остальными источниками, кроме  $\dot{E}_k$ .

Умножив левую и правую части (2.106) на  $\underline{Y}_{mk} / \underline{Y}_{nk}$ , вычтем полученное соотношением из уравнения (2.105). В результате получим

$$\dot{I}_m - \frac{\underline{Y}_{mk}}{\underline{Y}_{nk}} \dot{I}_n = \underline{A}_m - \frac{\underline{Y}_{mk}}{\underline{Y}_{nk}} \underline{A}_n \quad (2.107)$$

Обозначив в (2.107)  $\underline{A} = \underline{A}_m - \underline{Y}_{mk} \underline{A}_n / \underline{Y}_{nk}$  и  $\underline{B} = \underline{Y}_{mk} / \underline{Y}_{nk}$ , приходим к соотношению (2.104).

Отметим, что в соответствии с законом Ома из уравнения (2.104) вытекает аналогичное соотношение для напряжений в линейной цепи.

В качестве примера найдем аналитическую зависимость между токами  $I_1$  и  $I_2$  в схеме с переменным резистором на рисунке 103, где  $E = 100 \text{ В}$ ;  $R_1 = R_2 = R_6 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = R_5 = 30 \text{ Ом}$ .

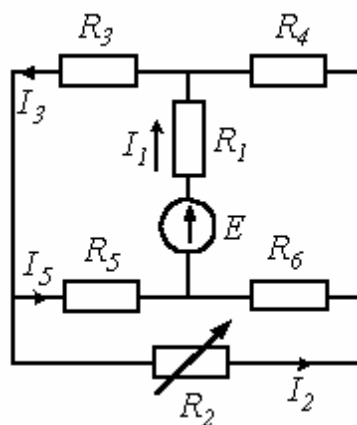


Рисунок 103 – Расчетная схема

Коэффициенты А и В можно рассчитать, рассмотрев любые два режима работы цепи, соответствующие двум произвольным значениям  $R_2$ .

Выбрав в качестве этих значений  $R_2 = \infty$  и  $R_2 = 0$ , для первого случая ( $I_2 = 0$ ) запишем

$$I_{1\infty} = \frac{E}{R_1 + \frac{(R_3 + R_5)(R_4 + R_6)}{R_3 + R_5 + R_4 + R_6}} = 3,33 \text{ A}$$

Таким образом,  $A = I_{1\infty} = 3,33 \text{ A}$ .

При  $R_2 = 0$  (режим короткого замыкания)

$$I_{1\text{КЗ}} = \frac{E}{R_1 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} + \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}} = 4 \text{ A}$$

откуда

$$I_{2\text{КЗ}} = I_{3\text{КЗ}} - I_{5\text{КЗ}} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} I_{1\text{КЗ}} - \frac{R_6}{R_5 + R_6} I_{1\text{КЗ}} = 2 \text{ A}$$

На основании (2.104)

$$B = \frac{I_{1\text{кз}} - A}{I_{2\text{кз}}} = 0,33 A$$

Таким образом,

$$I_1 = 3,33 + 0,33 I_2$$

### Принцип компенсации

Принцип компенсации основан на теореме о компенсации, которая гласит: в любой электрической цепи без изменения токов в ее ветвях сопротивление в произвольной ветви можно заменить источником с ЭДС, численно равной падению напряжения на этом сопротивлении и действующей навстречу току в этой ветви.

Для доказательства теоремы выделим из схемы произвольную ветвь с сопротивлением  $Z$ , по которой протекает ток  $\dot{I}$ , а всю остальную часть схемы условно обозначим некоторым активным двухполюсником  $A$  (см. рисунок 104,а).

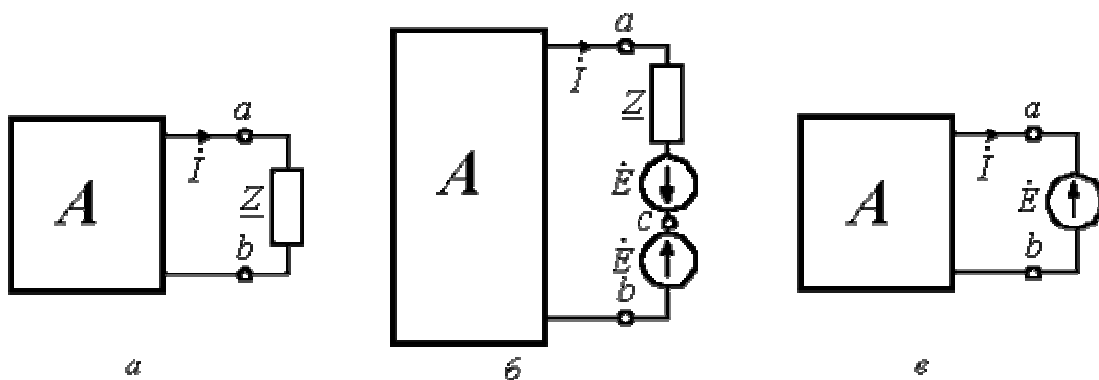


Рисунок 104 – К пояснению принципа компенсации

При включении в ветвь с  $\underline{Z}$  двух одинаковых и действующих навстречу друг другу источников ЭДС с  $\dot{E} = \dot{I}\underline{Z}$  (рисунок 104,б) режим работы цепи не изменится. Для этой цепи

$$\dot{\phi}_c = \dot{\phi}_a - \dot{I}\underline{Z} + \dot{E} = \dot{\phi}_a. \quad (2.108)$$

Равенство (2.108) позволяет гальванически соединить точки а и с, то есть перейти к цепи на рисунке 104,в. Таким образом, теорема доказана.

В заключение следует отметить, что аналогично для упрощения расчетов любую ветвь с известным током  $\dot{I}$  можно заменить источником тока  $\dot{J} = \dot{I}$ .

### Контрольные вопросы

1. Для каких цепей применим принцип суперпозиции?
2. В каких случаях эффективно применение метода наложения?
3. Как определяются входные и взаимные проводимости ветвей?
4. Докажите теорему взаимности.
5. Какими линейными соотношениями связаны токи и напряжения в ветвях линейной цепи?
6. Можно ли распространить принцип компенсации на нелинейную электрическую цепь?

## 2.10 Метод эквивалентного генератора

Метод эквивалентного генератора, основанный на **теореме об активном двухполюснике** (называемой также теоремой Гельмгольца-Тевенена), позволяет достаточно просто определить ток в одной (представляющей интерес при анализе) ветви сложной линейной схемы, не находя токи в остальных ветвях. Применение данного метода особенно эффективно, когда требуется определить значения тока в некоторой ветви для различных значений сопротивления в этой ветви в то время, как в остальной схеме сопротивления, а также ЭДС и токи источников постоянны.

Теорема об активном двухполюснике формулируется следующим образом: если активную цепь, к которой присоединена некоторая ветвь, заменить источником с ЭДС, равной напряжению на зажимах разомкнутой ветви, и сопротивлением, равным входному сопротивлению активной цепи, то ток в этой ветви не изменится.

Ход доказательства теоремы иллюстрируют схемы на рисунке 105.

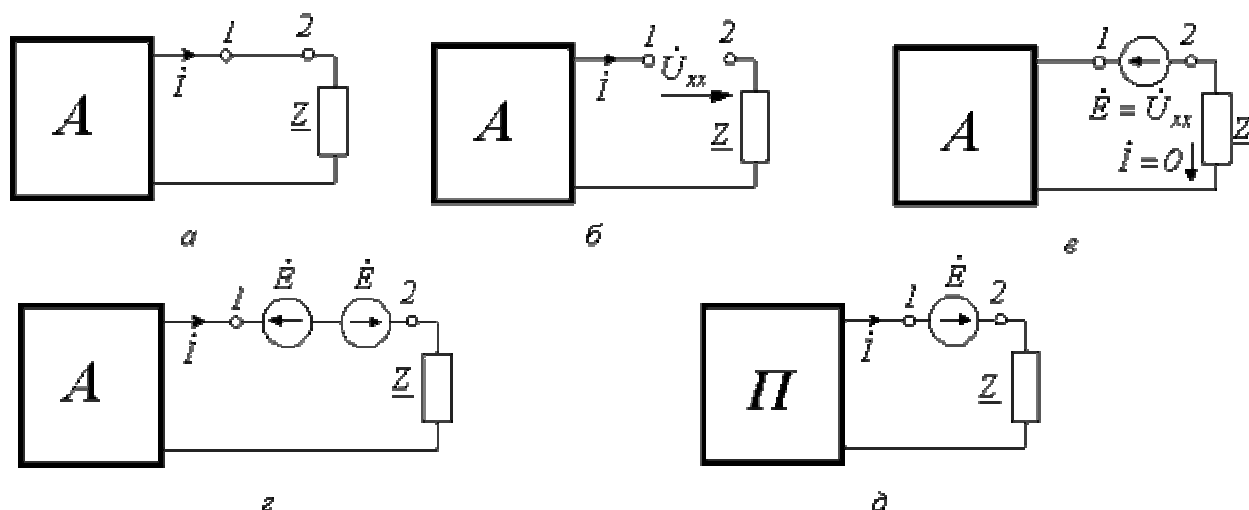


Рисунок 105 – К пояснению теоремы об активном двухполюснике

Пусть в схеме выделена некоторая ветвь с сопротивлением  $Z$ , а вся оставшаяся цепь обозначена как активный двухполюсник  $A$  (рисунок 105,а). Разомкнем эту ветвь между точками 1 и 2 (рисунок 105,б). На зажимах этой ветви имеет место напряжение  $\dot{U}_{xx}$ . Если теперь между зажимами 1 и 2 включить источник ЭДС  $\dot{E} = \dot{U}_{xx}$  с направлением, указанным на рисунке 105,в, то, как и в цепи на рисунке 105,б ток в ней будет равен нулю. Чтобы схему на рисунке 105,в сделать эквивалентной цепи на рисунке 105а, в рассматриваемую ветвь нужно включить еще один источник ЭДС  $\dot{E}$ , компенсирующий действие первого (рисунок 105,г). Будем теперь искать ток  $\dot{I}$  по принципу наложения, т.е. как сумму двух составляющих, одна из которых вызывается источниками, входящими в структуру активного двухполюсника, и источником ЭДС  $\dot{E}$ , расположенным между зажимами 1 и 2 слева, а другая – источником ЭДС  $\dot{E}$ , расположенным между зажимами 1 и 2 справа. Но первая из этих составляющих в соответствии с рисунке 105,в равна нулю, а значит, ток  $\dot{I}$  определяется второй составляющей, т.е. по схеме на рисунке 105,д, в которой активный двухполюсник  $A$  заменен пассивным двухполюсником  $\Pi$ . Таким образом, теорема доказана.

Указанные в теореме ЭДС и сопротивление можно интерпретировать как соответствующие параметры некоторого эквивалентного исходному активному двухполюснику генератора, откуда и произошло название этого метода.

Таким образом, в соответствии с данной теоремой схему на рисунке 106,а, где относительно ветви, ток в которой требуется определить, выделен активный двухполюсник А со структурой любой степени сложности, можно трансформировать в схему на рисунок 106,б.

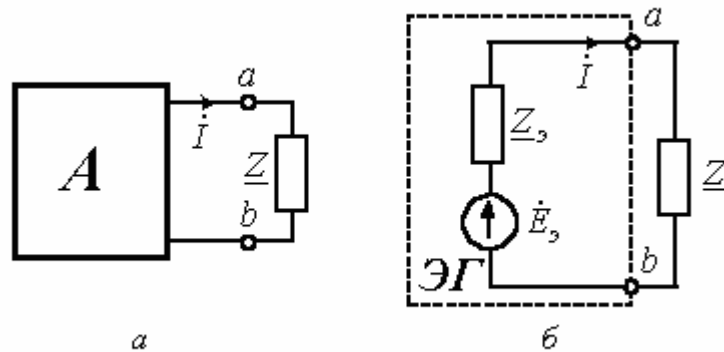


Рисунок 106 – Эквивалентный генератор

Отсюда ток  $\dot{I}$  находится, как:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}} = \frac{\dot{U}_{xx\ ab}}{\underline{Z}_s + \underline{Z}}, \quad (2.109)$$

где  $\dot{U}_{xx\ ab}$  - напряжение на разомкнутых зажимах а-б.

Уравнение (2.109) представляет собой аналитическое выражение метода эквивалентного генератора.

Параметры эквивалентного генератора (активного двухполюсника) могут быть определены экспериментальным или теоретическим путями.

В первом случае, в частности на постоянном токе, в режиме холостого хода активного двухполюсника измеряют напряжение  $U_{xx\ ab}$  на его зажимах с помощью вольтметра, которое и равно  $E_s$ . Затем закорачивают зажимы а и б активного двухполюсника с помощью амперметра, который показывает ток

$I_{кз} = \dot{E}_s / R_s$  (см. рисунок 106,б). Тогда на основании результатов измерений  $R_s = U_{кз\ ab} / I_{кз}$ .

В принципе аналогично находятся параметры активного двухполюсника и при синусоидальном токе; только в этом случае необходимо определить комплексные значения  $\dot{E}_s$  и  $\underline{Z}_s$ .

При теоретическом определении параметров эквивалентного генератора их расчет осуществляется в два этапа:

1. Любым из известных методов расчета линейных электрических цепей определяют напряжение на зажимах а-б активного двухполюсника при разомкнутой исследуемой ветви.
2. При разомкнутой исследуемой ветви определяется входное сопротивление активного двухполюсника, **заменяемого при этом пассивным**. Данная замена осуществляется путем устранения из структуры активного двухполюсника всех источников энергии, но при сохранении на их месте их собственных (внутренних) сопротивлений. В случае идеальных источников это соответствует закорачиванию всех источников ЭДС и размыканию всех ветвей с источниками тока.

Сказанное иллюстрируют схемы на рисунке 107, где для расчета входного (эквивалентного) сопротивления активного двухполюсника на рисунке 107,а последний преобразован в пассивный двухполюсник со структурой на рисунке 107,б. Тогда согласно схеме на рисунке 107,б

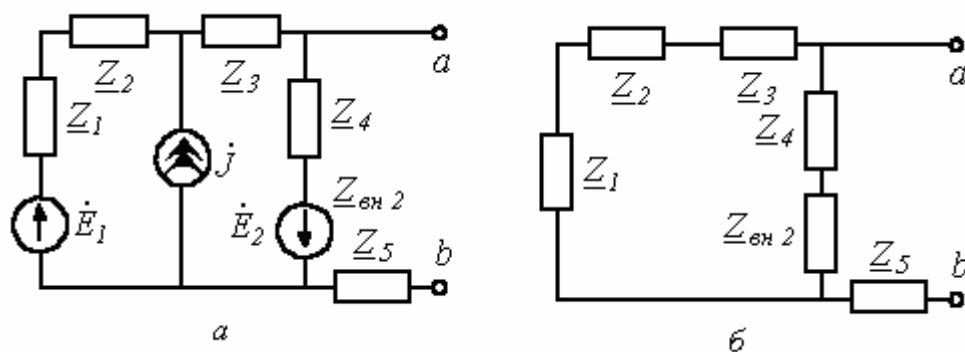


Рисунок 107 – Схема замещения активного двухполюсника

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_{ex} = \underline{Z}_5 + \frac{(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_{en2} + \underline{Z}_4)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 + \underline{Z}_{en2} + \underline{Z}_4}.$$

В качестве примера использования метода эквивалентного генератора для анализа определим зависимость показаний амперметра в схеме на рисунке 108,а при изменении сопротивления  $R$  переменного резистора в диагонали моста в пределах  $0 \leq R \leq 50 \text{ Ом}$ . Параметры цепи  $E=100 \text{ В}$ ;  $R_1=R_4=40 \text{ Ом}$ ;  $R_2=R_3=60 \text{ Ом}$ .

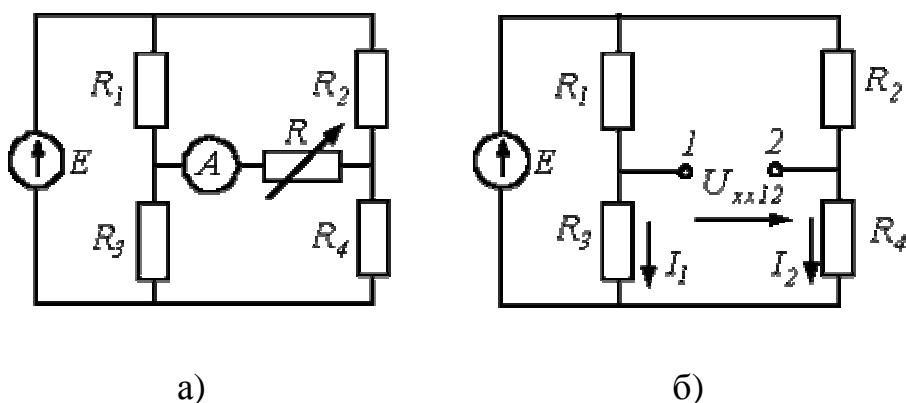


Рисунок 108 – Пример использования метода эквивалентного генератора

В соответствии с изложенной выше методикой определения параметров активного двухполюсника для нахождения значения  $\underline{E}_3$  перейдем к схеме на рисунке 108,б, где напряжение  $U_{xx12}$  на разомкнутых зажимах 1 и 2 определяет искомую ЭДС  $\underline{E}_3$ . В данной цепи

$$U_{xx12} = R_3 I_1 - R_4 I_2 = R_3 \frac{E}{R_1 + R_3} - R_4 \frac{E}{R_2 + R_4} = 20 \text{ В}.$$

Для определения входного сопротивления активного двухполюсника трансформируем его в схему на рисунке 109,а.



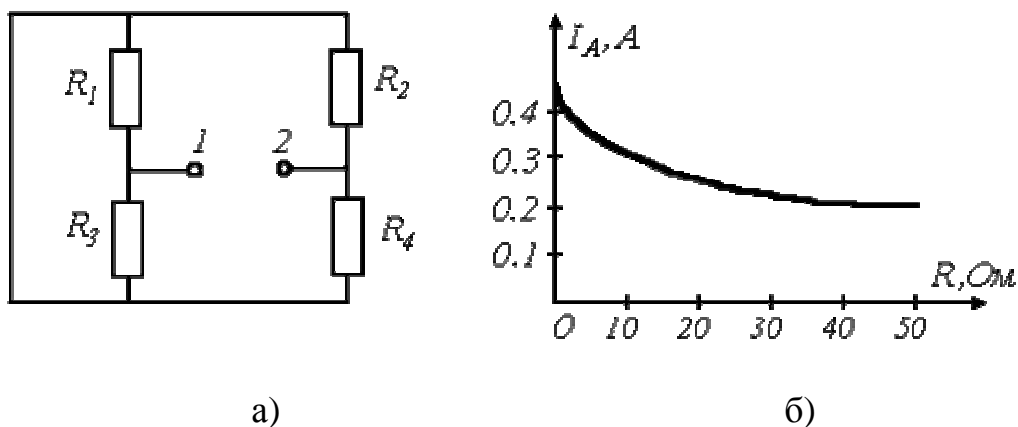


Рисунок 109 – К расчету методом эквивалентного генератора

а) схема для определения входного сопротивления активного двухполюсника;

б) график зависимости тока от сопротивления

Со стороны зажимов 1-2 данного пассивного двухполюсника его сопротивление равно:

$$R_{\text{вх}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = 48 \text{ Ом}$$

Таким образом, для показания амперметра в схеме на рисунке 108,а в соответствии с (2.109) можно записать

$$I_A = \frac{U_{\text{кх } 12}}{R_{\text{вх}} + R} = \frac{20}{48 + R} \text{ А} \quad (2.110)$$

Задавая значениями  $R$  в пределах его изменения, на основании (2.110) получаем кривую на рисунке 109,б.

В качестве примера использования метода эквивалентного генератора для анализа цепи при синусоидальном питании определим, при каком значении нагрузочного сопротивления  $Z_H$  в цепи на рисунке 110 в нем будет выделяться максимальная мощность, и чему она будет равна.

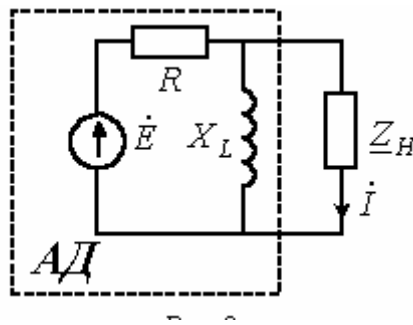


Рисунок 110 – Схема нагруженного асинхронного двигателя

Параметры цепи:  $E = 100 \text{ В}$ ;  $R = X_L = 10 \text{ Ом}$ .

В соответствии с теоремой об активном двухполюснике обведенная пунктиром на рисунке 110 часть схемы заменяется эквивалентным генератором с параметрами

$$\begin{aligned} \dot{E}_s &= \frac{\dot{E}}{R + jX_L} jX_L = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} \text{ В}; \\ \underline{Z}_s &= \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{10}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ} = 5 + j5 (\text{Ом}). \end{aligned}$$

В соответствии с (2.109) для тока  $\dot{I}$  через  $\underline{Z}_H$  можно записать

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \frac{\dot{E}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_H} = \frac{\dot{E}_s}{(R_s + jX_s) + (R_H + jX_H)} = \frac{\dot{E}_s}{(R_s + R_H) + j(X_s + X_H)} = \\ &= \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ}}{(5 + R_H) + j(5 + X_H)} \text{ А}, \end{aligned}$$

откуда для модуля этого тока имеем

$$I = \frac{E_s}{\sqrt{(R_s + R_H)^2 + (X_s + X_H)^2}} = \frac{100}{\sqrt{2} \sqrt{(5 + R_H)^2 + (5 + X_H)^2}} \text{ А}. \quad (2.111)$$

Анализ полученного выражения (2.111) показывает, что ток  $I$ , а следовательно, и мощность будут максимальны, если  $X_s + X_H = 0$ ; откуда  $X_H = -j5 \text{ Ом}$ , причем знак “-” показывает, что нагрузка  $\underline{Z}_H$  имеет емкостный характер.

Таким образом,

$$I = \frac{E_s}{R_s + R_H} \quad P_H = I^2 R_H = \frac{E_s^2 R_H}{(R_s + R_H)^2}.$$

Данные соотношения аналогичны соответствующим выражениям в цепи постоянного тока, для которой, как известно, максимальная мощность на нагрузке выделяется в режиме согласованной нагрузки, условие которого  $R_s = R_H$ .

Таким образом, искомые значения  $\underline{Z}_H$  и максимальной мощности:

$$\underline{Z}_H = 5 - j5 \text{ Ом}; \quad P_{\max} = 250 \text{ Вт}.$$

### Теорема вариаций

Теорема вариаций применяется в тех случаях, когда требуется рассчитать, насколько изменятся токи или напряжения в ветвях схемы, если в одной из ветвей этой схемы изменилось сопротивление.

Выделим на рисунке 111,а некоторые ветви с токами  $\dot{I}_m$  и  $\dot{I}_n$ , а остальную часть схемы обозначим активным четырехполюсником А. При этом, полагаем что проводимости  $\underline{Y}_m$  и  $\underline{Y}_n$  известны.

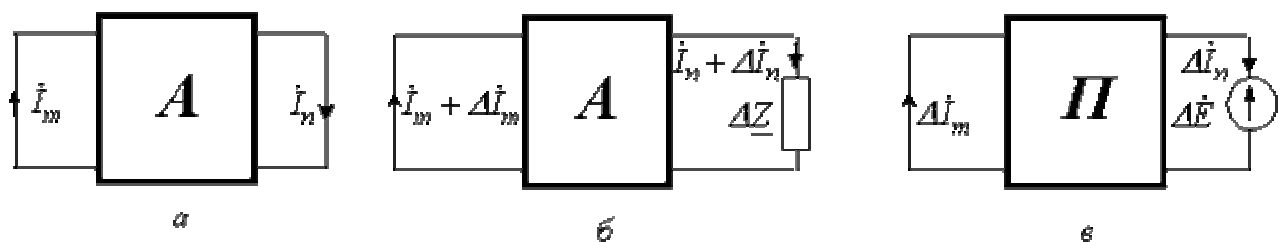


Рисунок 111- Схемы к пояснению теоремы вариаций

Пусть сопротивление  $n$ -й ветви изменилось на  $\Delta Z$ . В результате этого токи в ветвях схемы будут соответственно равны  $(\dot{I}_m + \Delta \dot{I}_m)$  и  $(\dot{I}_n + \Delta \dot{I}_n)$  (рисунок 111,б). На основании принципа компенсации заменим  $\Delta Z$  источником с ЭДС  $\Delta \dot{E} = \Delta Z(\dot{I}_n + \Delta \dot{I}_n)$ . Тогда в соответствии с принципом наложения можно считать, что приращения токов  $\Delta \dot{I}_m$  и  $\Delta \dot{I}_n$  вызваны  $\Delta \dot{E}$  в схеме на рисунке 111,в, в которой активный четырехполюсник **A** заменен на пассивный **П**.

Для этой цепи можно записать

$$\begin{aligned}\Delta \dot{I}_m &= -\Delta \dot{E} Y_{mn} = -Y_{mn} \Delta Z (\dot{I}_n + \Delta \dot{I}_n); \\ \Delta \dot{I}_n &= -\Delta \dot{E} Y_{nn} = -Y_{nn} \Delta Z (\dot{I}_n + \Delta \dot{I}_n),\end{aligned}$$

откуда

$$\Delta \dot{I}_n = -\frac{Y_{nn} \Delta Z \dot{I}_2}{1 + Y_{nn} \Delta Z} \quad \Delta \dot{I}_m = -\frac{Y_{mn} \Delta Z \dot{I}_n}{1 + Y_{nn} \Delta Z}.$$

Полученные соотношения позволяют определить изменения токов в  $m$ -й и  $n$ -й ветвях, вызванные изменением сопротивления в  $n$ -й ветви.

### Контрольные вопросы

1. В каких случаях эффективно применение метода эквивалентного генератора?
2. Как можно экспериментально определить параметры эквивалентного генератора?
3. Как можно определить параметры активного двухполюсника расчетным путем?
4. Как необходимо преобразовать исходную схему активного двухполюсника для расчета его входного сопротивления?
5. В каких задачах используется теорема вариаций?

## 2.11 Решение типовых задач

### Решение задач символическим методом

#### Задача 2.1

Для более успешного изучения символического метода рассмотрим, как определяются все токи в цепи, показанной на рисунке 112, для следующих данных:

$$e_1 = 170 \sin(\alpha - 20^\circ) \text{ В}; e_2 = 141 \cos \alpha \text{ В};$$

$$e_3 = 212 \sin(\alpha - 150^\circ) \text{ В}; R = 15 \text{ Ом}; L = 63.6 \text{ мГн};$$

$$C = 318 \text{ мкФ}; f = 50 \text{ Гц}.$$

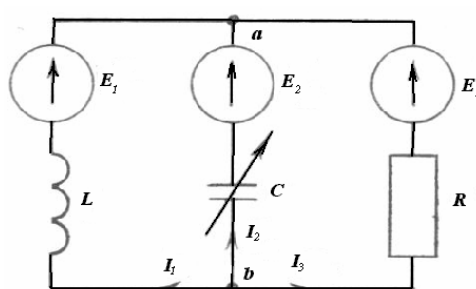


Рисунок 112 – Расчетная схема

#### Решение

1. Определяем комплексы действующих значений всех э.д.с.:

$$E_1 = \frac{170e^{-j20^\circ}}{\sqrt{2}} = 120e^{-j20^\circ} = 113 - j41 \text{ В};$$

$$E_2 = \frac{141e^{j90^\circ}}{\sqrt{2}} = 100e^{j90^\circ} = j100 \text{ В};$$

$$E_3 = \frac{212e^{-j150^\circ}}{\sqrt{2}} = 150e^{-j150^\circ} = -130 - j75 \text{ В};$$

1. Подсчитаем комплексные сопротивления и проводимости ветвей:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 314 \cdot 63.6 \cdot 10^{-3} = 20 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_1 = j20 = 20e^{j90^\circ} \text{ Ом}; \quad \underline{Z}_2 = -j10 = 10e^{-j90^\circ}$$

Ом;

$$\underline{Z}_3 = 15 \text{ Ом};$$

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = 0.05e^{-j90^\circ} = -j0.05 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2} = 0.1e^{j90^\circ} = j0.1 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3} = 0.0667 \text{ См};$$

2. Определяем токи в ветвях методом двух узлов:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \frac{\sum \dot{E}Y}{\sum Y} = \frac{120e^{-j20^\circ} \cdot 0.05e^{-j90^\circ} + 100e^{j90^\circ} \cdot 0.1e^{j90^\circ} + 150e^{-j150^\circ} \cdot 0.667}{-j0.05 + j0.1 + 0.667} = \\ &= \frac{6e^{-j110^\circ} + 10e^{j180^\circ} + 10e^{-j150^\circ}}{0.0667 + j0.05} = \frac{-2.05 + j5.65 - 10 - 8.66 - j5}{0.0667 + j0.05} = \frac{-20.71 - j10.65}{0.0667 + j0.05} = \\ &= \frac{23.7e^{-j150^\circ 30'}}{0.0835e^{j36^\circ 45'}} = 284e^{-j187^\circ 15'} = -280 + j38.3B \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_1} = \frac{113 - j41 + 280 - j38.3}{20e^{j90^\circ}} = \frac{393 - j79.3}{20e^{j90^\circ}} = \\ &= \frac{400e^{-j11^\circ 25'}}{20e^{j90^\circ}} = 20e^{-j101^\circ 25'} = -3.86 - j19.6A. \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{j100 + 280 - j38.3}{10e^{-j90^\circ}} = \frac{280 + j61.7}{10e^{-j90^\circ}} = \\ &= \frac{286e^{j12^\circ 25'}}{10e^{-j90^\circ}} = 28.6e^{j102^\circ 25'} = -6.15 + j27.2A. \\ \dot{I}_3 &= \frac{\dot{E}_3 - \dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = \frac{-130 - j75 + 280 - j38.3}{15} = \frac{150 - j113.3}{15} = \\ &= \frac{188e^{-j37^\circ}}{15} = 12.52e^{-j37^\circ} = 10 - j7.56A. \end{aligned}$$

Проверка по 1-му закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} \sum \dot{I} &= 0 \\ \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3 &= -3.86 - j19.6 - 6.15 + j27.2 + 10 - j7.56 = -0.01 + j0.04 \approx 0. \end{aligned}$$

## Задача 2.2

Для электрической цепи (рисунок 112) рассчитать и построить круговую диаграмму.

Рассмотрим порядок построения диаграммы для цепи, представленной на рисунке 112.

Расчет для построения круговой диаграммы ведем по методу активного двухполюсника или эквивалентного генератора:

1) Разрываем ветвь с изменяющимся сопротивлением  $X_c$  и определяем ток в полученной схеме и напряжение в месте разрыва — напряжение холостого хода  $U_{xx}$  (рисунок 113):

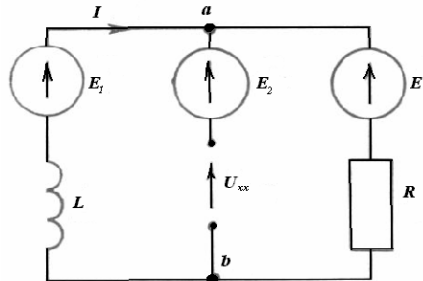


Рисунок 113- Расчетная схема

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}_1 - \dot{E}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = \frac{113 - j41 + 130 + j75}{j20 + 15} = \frac{243 + j34}{15 + j20} = \frac{245e^{j8^\circ}}{25e^{j53^\circ}} = 9.8e^{-j45^\circ} \text{ А.}$$

По второму закону Кирхгофа имеем:

$$\dot{I}R + \dot{U}_{xx} = \dot{E}_2 - \dot{E}_3,$$

Откуда

$$\begin{aligned} \dot{U}_{xx} &= \dot{E}_2 - \dot{E}_3 - \dot{I}R = j100 + 130 + j75 - 9.8e^{-j45^\circ} \cdot 15 = \\ &= 130 + j175 - 147e^{-j45^\circ} = 130 + j175 - 104 + j104 = \\ &= 26 + j279 = 279e^{j84^\circ 40'} \text{ В.} \end{aligned}$$

2) Исключаем из схемы (рисунок 112) все э. д. с. и вводим э. д. с.  $\dot{E} = U_{xx}$  в ветвь с изменяющимся сопротивлением. Получившаяся схема приведена на рисунке 114.

Определим из нее входное сопротивление (эквивалентное сопротивление разветвления), для чего представим ее в более наглядном виде (рисунок 115):

$$\underline{Z}_{gx} = \frac{R \cdot jX_L}{R + jX_L} = \frac{300e^{j90^\circ}}{25e^{j53^\circ}} = 12e^{j37^\circ} \text{ Ом.}$$

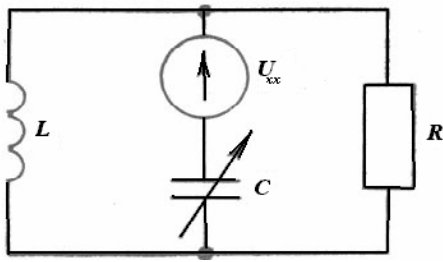


Рисунок 114 – Приведенная схема

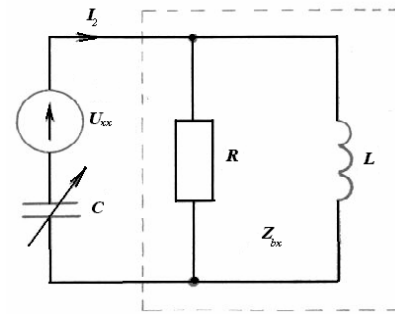


Рисунок 115 – Схема для определения входного сопротивления

В результате получаем схему с последовательным соединением постоянного сопротивления  $Z_{BX}$  и изменяющегося от 0 до  $\infty$  сопротивления  $\underline{Z} = -jX_C = X_C e^{-j90^\circ}$  (рисунок 116). Ток в этой же схеме определяем по методу активного двухполюсника:

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{\dot{U}_{xx}}{\underline{Z}_{gx} + \underline{Z}_2} = \frac{\dot{U}_{xx} / \underline{Z}_{gx}}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{gx}}} = \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{\underline{Z}_2 e^{j\varphi_2}}{\underline{Z}_{gx} e^{j\varphi_{gx}}}} = \\ &= \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{gx}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_{gx})}} = \frac{\dot{I}_k}{1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{gx}} e^{j\psi}} \end{aligned}$$

где  $\dot{I}_k$  — значение тока  $\dot{I}_c$  при  $Z = -jX_C = 0$ .

Это выражение представляет собой уравнение дуги окружности в комплексной форме,  $\dot{I}_k$  является хордой этой окружности, а  $\Psi = \varphi_2 - \varphi_{gx}$  — угол между продолжением хорды и касательной. Знания этих величин достаточно для построения круговой диаграммы. Определяем ток короткого замыкания и угол  $\psi$

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= \frac{\dot{U}_{xx}}{\underline{Z}_{gx}} = \frac{297 e^{j84^\circ 40'}}{12 e^{j37^\circ}} = 23.25 e^{j47^\circ 40'} \text{ A}; \\ \psi &= \varphi_2 - \varphi_{gx} = -90^\circ - 37^\circ = -127^\circ. \end{aligned}$$



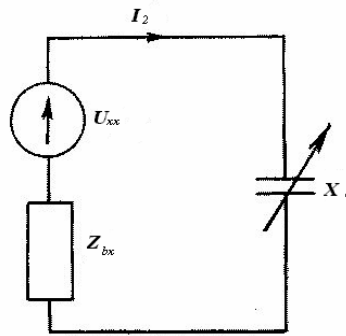


Рисунок 116 – Схема активного двухполюсника

По полученным данным строим круговую диаграмму (рисунок 117). Построение ведем в следующем порядке:

1. Откладываем горизонтально действительную ось.

$$m_{U_{xx}} = 2 \frac{2B}{\text{см}}; m_I = 2 \frac{A}{\text{см}}; m_Z = 1 \frac{\text{Ом}}{\text{см}}$$

2. Под углом  $47^\circ 40'$  проводим вектор  $i_k$ . Масштаб тока выбираем произвольно (в нашем случае  $m_I = 2 \text{ А/см}$ ).

3. Под углом  $\psi$  к продолжению вектора  $i_k$  проводим прямую, касательную к будущей окружности. Поскольку  $\psi < 0$ , откладываем его в сторону отставания от вектора  $i_k$ , т. е. по часовой стрелке.

4. Из геометрии известно, что центр окружности лежит, во-первых, на перпендикуляре к хорде, восстановленном из ее середины, и, во-вторых, на перпендикуляре к касательной. На этом основании определяется центр круговой диаграммы — точка О.

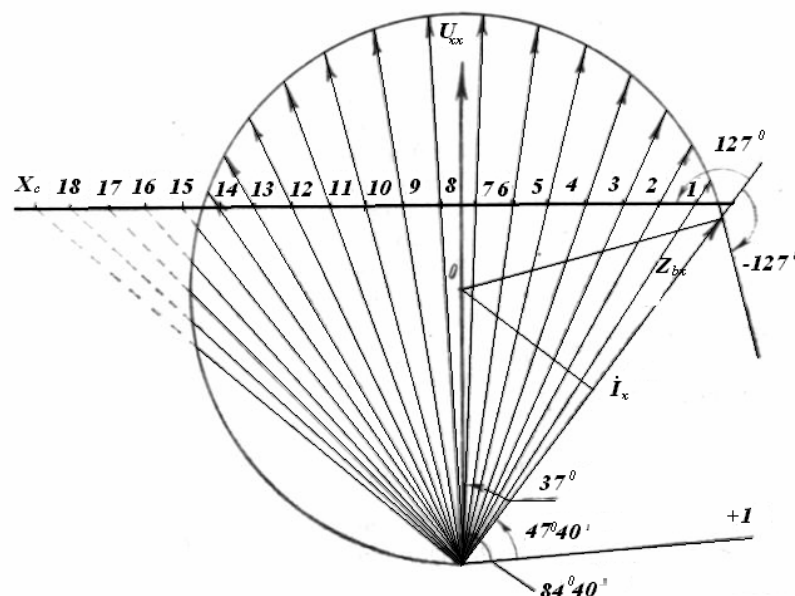


Рисунок 117 – Круговая диаграмма

5. С центром в точке  $O$  чертим рабочую дугу окружности. Обратите внимание на то, что эта дуга всегда находится по обратную сторону от касательной (относительно хорды  $\vec{i}_k$ ).

6. На хорде  $\vec{i}_k$  в удобном масштабе откладываем величину (модуль) сопротивления  $Z_{BX}$  (нами принят  $m_z=1\text{Ом/см}$ ), под углом  $-\psi$  из конца отрезка  $Z_{BX}$  проводим линию изменяющегося по модулю сопротивления  $Z = X_C$  и наносим на нее в масштабе  $m_z$  различные значения сопротивления  $X_C$  — от 0 до  $\infty$ . Соединив полученные точки с началом вектора  $\vec{i}_k$  и продолжив каждый из этих отрезков до пересечения с окружностью, получим векторы токов (в масштабе  $m_1$ ), соответствующие разным значениям  $X_C$ . Так, при  $X_C=10\text{ Ом}$   $I_2 = 28\text{ А}$ , что соответствует расчету.

7. В произвольном масштабе  $m_U$  откладываем вектор  $U_{xx}$ . В соответствии с данными нашей задачи он построен под углом  $84^\circ 40'$  к действительной оси. Угол между векторами  $U_{xx}$  и  $I_k$  равен  $\varphi_{BX}$ .

## 2.12 Применение пакета Mathcad к расчету электрических цепей переменного тока

### Задача 2.1

Рассчитать индуктивное и емкостное сопротивления при различных частотах в неразветвленной электрической цепи переменного тока (рисунок 118). Определить полное сопротивление цепи и ток в цепи с напряжением  $U=10\text{ В}$ . Построить графики изменения тока, индуктивного, емкостного и полного сопротивлений от частоты. Параметры схемы:  $R=5\text{ Ом}$ ;  $L=0,02\text{ Гн}$ ;  $C=126,7\text{ мкФ}$ ;  $f=0\div 200\text{ Гц}$ .

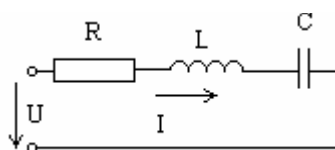


Рисунок 118- Схема к задаче 2.1

### Решение

Решение задачи осуществляется в порядке определения неизвестных величин. Задаем исходные данные:

$$U := 10 \cdot \text{В} \quad R := 5 \cdot \Omega \quad L := 0.02 \cdot \text{Н} \quad C := 126.7 \cdot \mu\text{F}$$

Начальное значение частоты задаем не равным нулю до  $250\text{ Гц}$  с шагом  $50\text{ Гц}$ :

$$f := 0.0001 \cdot \text{Hz}, 50 \cdot \text{Hz}.. 250 \cdot \text{Hz}$$

Вводим расчетные формулы для определения:

$$XL(f) := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

$$XC(f) := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

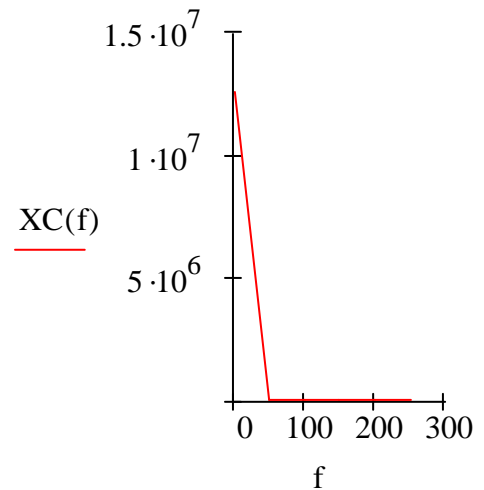
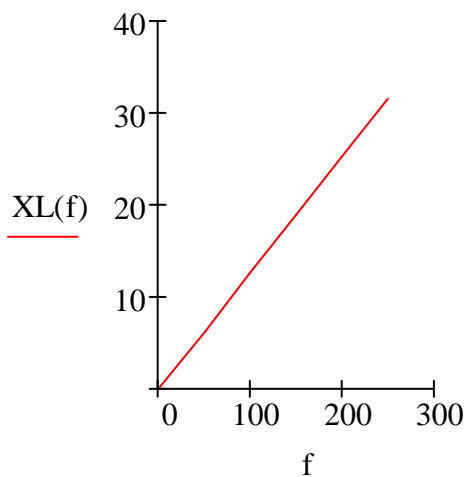
$$Z(f) := \sqrt{R^2 + (XL(f) - XC(f))^2}$$

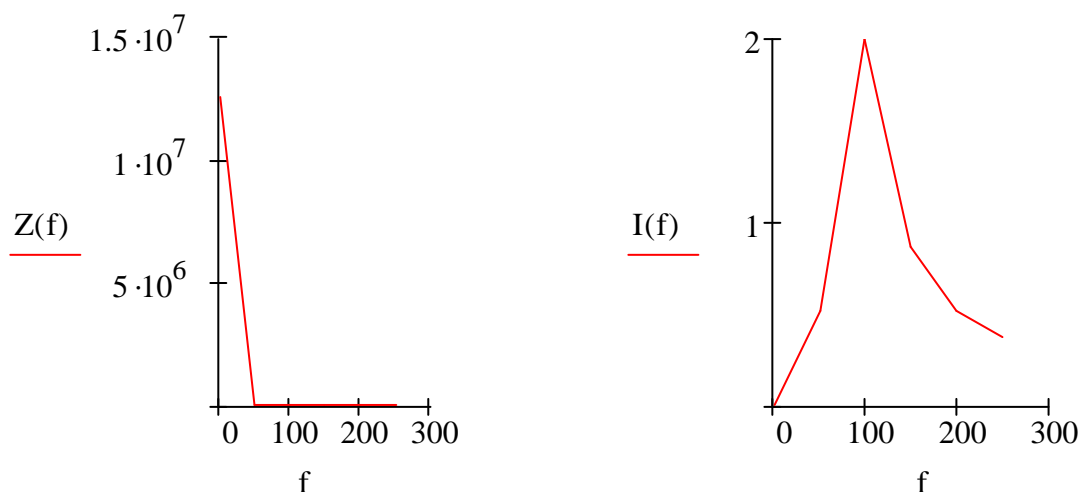
$$I(f) := \frac{U}{Z(f)}$$

Результаты отображаются в виде таблицы для различных частот:

f =	XL(f) =	XC(f) =	Z(f) =	I(f) =
$1 \cdot 10^{-4}$ Hz	$1.257 \cdot 10^{-5}$ Ω	$1.256 \cdot 10^7$ Ω	$1.256 \cdot 10^7$ Ω	$7.961 \cdot 10^{-7}$ A
50	6.283	25.123	19.492	0.513
100	12.566	12.562	5	2
150	18.85	8.374	11.607	0.862
200	25.133	6.281	19.504	0.513
250	31.416	5.025	26.861	0.372

Строим графики зависимости сопротивлений и тока от частоты:





Данную задачу можно решить с помощью панели программирования.

Вводим исходные данные:

$$U := 10 \quad f := 50 \quad R := 5 \quad L := 0.02 \quad C := 126.7 \cdot 10^{-6} \quad n := 5$$

Для создания строк программы используем команду **Add Line** на панели программирования. Ключевое слово **for** задает цикл программы, где  $n := 5$  - число циклических вычислений. Расчетные формулы вводим в ячейки матрицы размер которой составляет один столбец, четыре строки.

$$\begin{array}{l}
 F(n) := \left| \begin{array}{l}
 F \leftarrow 0 \\
 \text{for } i \in 1..n \\
 \quad F^{(i)} \leftarrow \left[ \begin{array}{c}
 \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i}{1} \\
 \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \\
 \sqrt{R^2 + \left( 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \right)^2} \\
 \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left( 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \right)^2}}
 \end{array} \right]
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{res} := F(n)
 \end{array}$$

Результаты вычислений представлены матрицей:

$$F(n) = \begin{pmatrix} 0 & 6.283 & 12.566 & 18.85 & 25.133 & 31.416 \\ 0 & 25.123 & 12.562 & 8.374 & 6.281 & 5.025 \\ 0 & 19.492 & 5 & 11.607 & 19.504 & 26.861 \\ 0 & 0.513 & 2 & 0.862 & 0.513 & 0.372 \end{pmatrix}$$

в которой, каждый столбец соответствует определенной частоте (первый соответствует частоте 0 Гц, второй – 50 Гц, третий -100 Гц и т.д.). Строки в столбце соответствуют расчетным формулам: индуктивное сопротивление; емкостное сопротивление; полное сопротивление и ток.

Результат можно выводить отдельными столбцами:

$$f50 := \text{res}^{(1)} \quad f100 := \text{res}^{(2)} \quad f150 := \text{res}^{(3)} \quad f200 := \text{res}^{(4)} \quad f250 := \text{res}^{(5)}$$

$$f50 = \begin{pmatrix} 6.283 \\ 25.123 \\ 19.492 \\ 0.513 \end{pmatrix} \quad f100 = \begin{pmatrix} 12.566 \\ 12.562 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad f150 = \begin{pmatrix} 18.85 \\ 8.374 \\ 11.607 \\ 0.862 \end{pmatrix} \quad f200 = \begin{pmatrix} 25.133 \\ 6.281 \\ 19.504 \\ 0.513 \end{pmatrix}$$

$$f250 = \begin{pmatrix} 31.416 \\ 5.025 \\ 26.861 \\ 0.372 \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

### Задача 2.2

По RC-цепи (рисунок 119) протекает синусоидальный ток с амплитудным значением  $I_m = 1,41$  А и частотой  $f = 50$  Гц. Найти мгновенные значения приложенного к цепи напряжения  $u$ , напряжения на конденсаторе  $U_c$  и резисторе  $U_r$ , если  $R = 100$  Ом;  $C = 31,8$  мкФ. Построить графики мгновенных значений тока, приложенного к цепи напряжения и мощности.

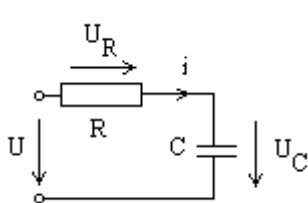


Рисунок 119 – Схема к задаче 2.1

## Решение

Задаем исходные данные:

$$f := 50 \quad R := 100 \quad C := 31.8 \cdot 10^{-6} \quad I := 1.41$$

Расчет выполняем через мгновенные значения по выражениям:

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad i(t) := I \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad U_r(t) := R \cdot i(t)$$

$$\omega = 314.159 \quad i(t) \rightarrow 1.41 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \\ U_r(t) \rightarrow 141.00 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$$

$$U_c(t) := \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

$$U_c(t) \text{ float},3 \rightarrow -141. \cdot \cos(314. \cdot t)$$

$$U(t) := U_r(t) + U_c(t)$$

$$U(t) \text{ float},3 \rightarrow 141. \cdot \sin(314. \cdot t) - 141. \cdot \cos(314. \cdot t)$$

$$S(t) := U(t) \cdot i(t)$$

$$S(t) \text{ float},3 \rightarrow 1.41 \cdot (141. \cdot \sin(314. \cdot t) - 141. \cdot \cos(314. \cdot t)) \cdot \sin(314. \cdot t)$$

или

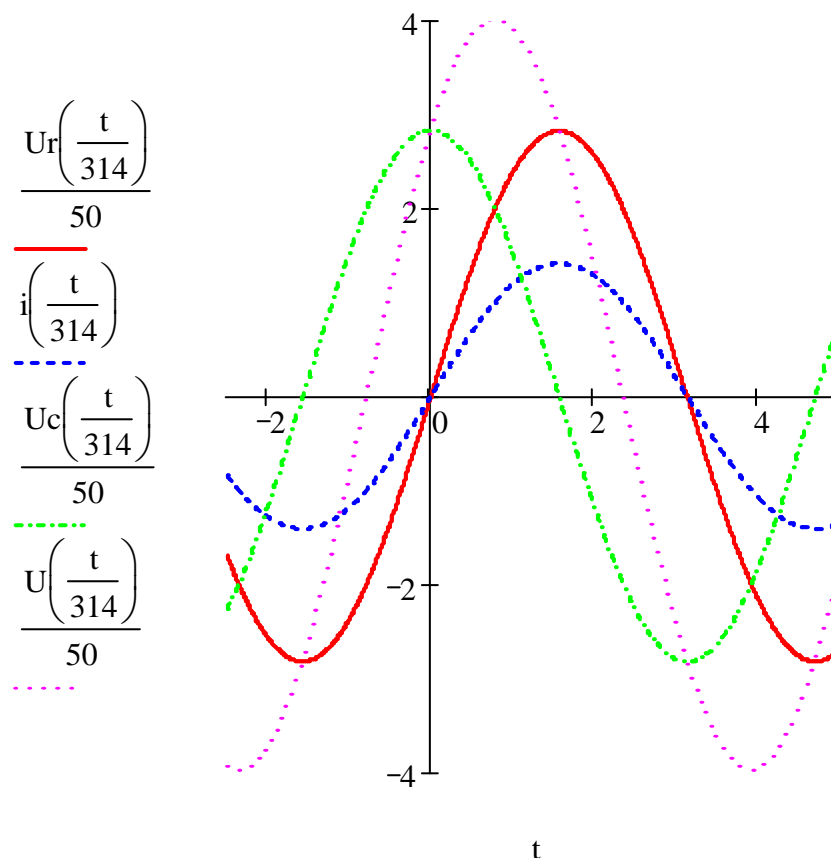
$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad i(t) := I \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad U_r(t) := R \cdot i(t)$$

$$\omega = 314.159 \quad i(t) \rightarrow 1.41 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t) \quad U_r(t) \rightarrow 141.00 \cdot \sin(100 \cdot \pi \cdot t)$$

$$x_c := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

$$U_c(t) := x_c \cdot I \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) \quad U(t) := U_r(t) + U_c(t) \quad S(t) := U(t) \cdot i(t)$$

Строим графики токов и напряжений:



На графиках видны углы сдвига фаз между током и напряжением. Чтобы получить численные значения мгновенных величин в различные моменты времени, задаем расчетный интервал и шаг вычислений:

$$t := 0, \frac{\pi}{10} .. 2 \cdot \pi$$

i(t) =	Ur(t) =	Uc(t) =	U(t) =	S(t) =
0	0	141.137	141.137	0
-1.361	-136.11	-36.846	-172.956	235.411
0.711	71.067	-121.899	-50.832	-36.125
0.99	99.004	100.493	199.497	197.51
-1.228	-122.76	69.429	-53.331	65.469
-0.349	-34.908	-136.744	-171.651	59.919
1.41	140.986	1.969	142.955	201.547
-0.387	-38.705	135.716	97.01	-37.548
-1.208	-120.777	-72.83	-193.607	233.833
1.018	101.767	-97.689	4.077	4.149
0.676	67.642	123.836	191.478	129.52
-1.371	-137.084	33.031	-104.054	142.641
0.039	3.934	-141.082	-137.149	-5.395
1.35	135.03	40.633	175.663	237.198
-0.744	-74.437	119.867	45.43	-33.817
-0.962	-96.165	-103.219	-199.383	191.736

### Задача 2.3

В разветвленной цепи (рисунок 120), содержащей две ветви, определить ток, активную, реактивную и полную мощности при неизменной частоте источника  $f=50$  Гц и неизменном напряжении  $U=200$  В. Параметры цепи:  $R_1=10$  Ом;  $L=55,2$  мГн;  $R_2=0$  Ом;  $C=31,8$  мкФ.

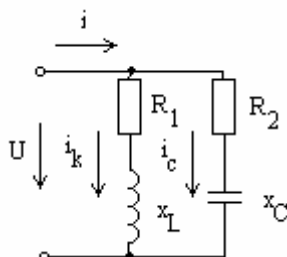


Рисунок 120 – Схема к задаче 2.3

### Решение

#### Метод проводимостей

Исходные данные:

$$f := 100 \cdot \text{Hz} \quad R1 := 10 \cdot \Omega \quad C := 138 \cdot \mu\text{F} \quad L := 55.2 \cdot \text{mH} \quad R2 := 0 \cdot \Omega \quad U := 200 \cdot \text{V}$$

Определяем угловую частоту и реактивные сопротивления ветвей:

$$\begin{aligned} \omega &:= 2 \cdot \pi \cdot f & X_L &:= \omega \cdot L & X_C &:= \frac{1}{\omega \cdot C} \\ \omega &= 628.319 \text{ Hz} & X_L &= 34.683 \Omega & X_C &= 11.533 \Omega \end{aligned}$$

Определяем активную, реактивную и полную проводимости ветвей и всей цепи:

$$\begin{aligned} G1 &:= \frac{R1}{R1^2 + X_L^2} & B_L &:= \frac{X_L}{(R1^2 + X_L^2)} & Y_L &:= \sqrt{G1^2 + B_L^2} \\ G1 &= 7.675 \times 10^{-3} \text{ S} & B_L &= 0.027 \text{ S} & Y_L &= 0.028 \text{ S} \\ G2 &:= \frac{R2}{R2^2 + X_C^2} & B_C &:= \frac{X_C}{(R2^2 + X_C^2)} & Y_C &:= \sqrt{G2^2 + B_C^2} \\ G2 &= 0 \text{ S} & B_C &= 0.087 \text{ S} & Y_C &= 0.087 \text{ S} \end{aligned}$$



$$Y := \sqrt{(G1 + G2)^2 + (BL - BC)^2}$$

$$Y = 0.061 \text{ S}$$

Определяем токи в ветвях и в неразветвленной части цепи:

$$\begin{array}{lll} I := U \cdot Y & I1 := U \cdot YL & I2 := U \cdot YC \\ I = 12.115 \text{ A} & I1 = 5.541 \text{ A} & I2 = 17.342 \text{ A} \end{array}$$

Коэффициент мощности всей цепи:

$$\cos := \frac{G1 + G2}{Y}$$

$$\cos = 0.127$$

Реактивные мощности:

$$\begin{array}{lll} QL := U^2 \cdot BL & QC := U^2 \cdot BC & Q := U^2 \cdot (BL - BC) \\ QL = 1.065 \times 10^3 \text{ W} & QC = 3.468 \times 10^3 \text{ W} & Q = -2.404 \times 10^3 \text{ W} \end{array}$$

Активная мощность:

$$P := U^2 \cdot G1$$

$$P = 307.002 \text{ W}$$

Полная мощность:

$$\begin{array}{lll} SL := U^2 \cdot YL & SC := U^2 \cdot YC & S := U^2 \cdot Y \\ SL = 1.108 \times 10^3 \text{ W} & SC = 3.468 \times 10^3 \text{ W} & S = 2.423 \times 10^3 \text{ W} \end{array}$$

## Символический метод

Определяем угловую частоту и реактивные сопротивления ветвей:

$$\begin{array}{lll} \omega := 2 \cdot \pi \cdot f & XL := \omega \cdot L & XC := \frac{1}{\omega \cdot C} \\ \omega = 628.319 \text{ Hz} & XL = 34.683 \Omega & XC = 11.533 \Omega \end{array}$$

Записываем полные сопротивления в комплексной форме:

$$\begin{array}{ll} Z1 := R1 + i \cdot XL & Z2 := R2 - i \cdot XC \\ Z1 = 10 + 34.683i \Omega & Z2 = -11.533i \Omega \end{array}$$

Определяем модули и аргументы комплексных сопротивлений ветвей:

$$\begin{aligned} |Z1| &= 36.096 \Omega & |Z2| &= 11.533 \Omega \\ \arg(Z1) &= 73.916 \text{ deg} & \arg(Z2) &= -90 \text{ deg} \end{aligned}$$

Определяем токи в ветвях:

$$\begin{aligned} I1 &:= \frac{U}{Z1} & I2 &:= \frac{U}{Z2} \\ I1 &= 1.535 - 5.324i \text{ A} & I2 &= 17.342i \text{ A} \\ |I1| &= 5.541 \text{ A} & |I2| &= 17.342 \text{ A} \\ \arg(I1) &= -73.916 \text{ deg} & \arg(I2) &= 90 \text{ deg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &:= I1 + I2 \\ I &= 1.535 + 12.018i \text{ A} \\ |I| &= 12.115 \text{ A} \\ \arg(I) &= 82.721 \text{ deg} \end{aligned}$$

Определяем мощность ветвей и всей цепи:

$$\begin{aligned} S1 &:= U \cdot I1 & S2 &:= U \cdot I2 \\ S1 &= 307.002 - 1.065i \times 10^3 \text{ W} & S2 &= 3.468i \times 10^3 \text{ W} \\ P1 &:= \text{Re}(S1) & P2 &:= \text{Re}(S2) \\ P1 &= 307.002 \text{ W} & P2 &= 0 \text{ W} \\ Q1 &:= \text{Im}(S1) & Q2 &:= \text{Im}(S2) \\ Q1 &= -1.065 \times 10^3 \text{ W} & Q2 &= 3.468 \times 10^3 \text{ W} \\ S &:= U \cdot I \\ S &= 307.002 + 2.404i \times 10^3 \text{ W} \\ P &:= \text{Re}(S) \\ P &= 307.002 \text{ W} \\ Q &:= \text{Im}(S) \\ Q &= 2.404 \times 10^3 \text{ W} \end{aligned}$$

Результаты расчетов двумя методами сходятся.

### 3. Трехфазные цепи

#### 3.1 Общие теоретические сведения

Трехфазная цепь является частным случаем многофазных электрических систем, представляющих собой совокупность электрических цепей, в которых действуют ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе относительно друг друга на определенный угол. Отметим, что обычно эти ЭДС, в первую очередь в силовой энергетике, синусоидальны. Однако, в современных электромеханических системах, где для управления исполнительными двигателями используются преобразователи частоты, система напряжений в общем случае является несинусоидальной. Каждую из частей многофазной системы, характеризующуюся одинаковым током, называют **фазой**, т.е. фаза – это участок цепи, относящийся к соответствующей обмотке генератора или трансформатора, линии и нагрузке.

Таким образом, понятие «фаза» имеет в электротехнике два различных значения:

- фаза как аргумент синусоидально изменяющейся величины;
- фаза как составная часть многофазной электрической системы.

Разработка многофазных систем была обусловлена исторически. Исследования в данной области были вызваны требованиями развивающегося производства, а успехам в развитии многофазных систем способствовали открытия в физике электрических и магнитных явлений.

Важнейшей предпосылкой разработки многофазных электрических систем явилось открытие явления вращающегося магнитного поля (Г.Феррарис и Н.Тесла, 1888 г.). Первые электрические двигатели были двухфазными, но они имели невысокие рабочие характеристики. Наиболее рациональной и перспективной оказалась трехфазная система, основные преимущества которой будут рассмотрены далее. Большой вклад в разработку трехфазных систем внес выдающийся русский ученый-электротехник М.О.Доливо-Добровольский, создавший трехфазные асинхронные двигатели, трансформаторы, предложивший трех- и четырехпроводные цепи, в связи с чем по праву считающийся основоположником трехфазных систем.

Источником трехфазного напряжения является трехфазный генератор, на статоре которого (см. рисунок 120,а) размещена трехфазная обмотка. Фазы этой обмотки располагаются таким образом, чтобы их магнитные оси были сдвинуты в пространстве друг относительно друга на  $2\pi/3$  эл. рад. На рисунке 120,а каждая фаза статора условно показана в виде одного витка.

Начала обмоток принято обозначать заглавными буквами А,В,С, а концы-соответственно прописными x,y,z. ЭДС в неподвижных обмотках статора индуцируются в результате пересечения их витков магнитным полем, создаваемым током обмотки возбуждения вращающегося ротора (на рисунке 120,а) ротор условно изображен в виде постоянного магнита, что используется на практике при относительно небольших мощностях). При вращении ротора с равномерной скоростью в обмотках фаз статора индуцируются периодически изменяющиеся синусоидальные ЭДС одинаковой частоты и амплитуды, но отличающиеся вследствие пространственного сдвига друг от друга по фазе на  $2\pi/3$  рад. (см. рисунок 120,б).

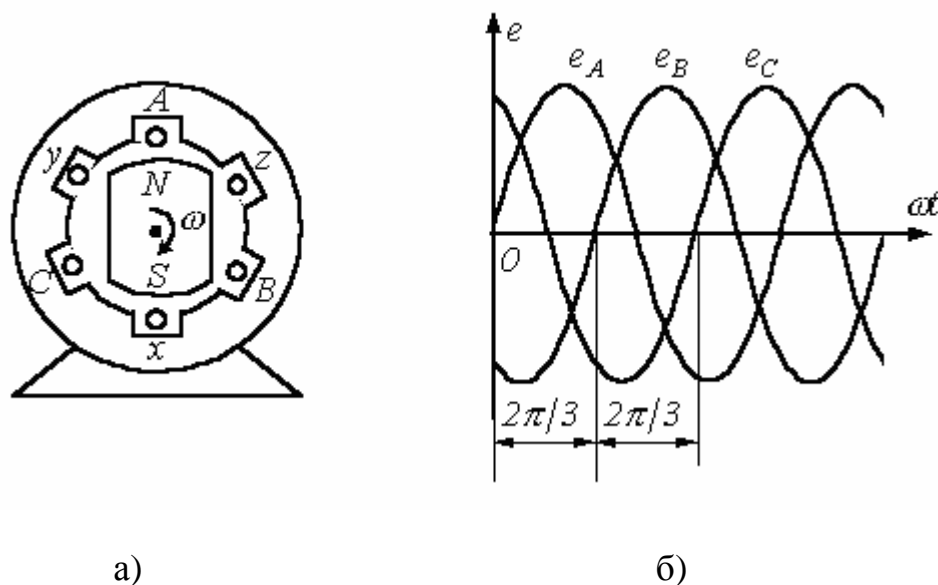


Рисунок 120 – Трехфазный синхронный генератор и графики ЭДС фаз

Трехфазные системы в настоящее время получили наибольшее распространение. На трехфазном токе работают все крупные электростанции и потребители, что связано с рядом преимуществ трехфазных цепей перед однофазными, важнейшими из которых являются:

- экономичность передачи электроэнергии на большие расстояния;
- самым надежным и экономичным, удовлетворяющим требованиям промышленного электропривода является асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором;

- возможность получения с помощью неподвижных обмоток вращающегося магнитного поля, на чем основана работа синхронного и асинхронного двигателей, а также ряда других электротехнических устройств;
- уравнированность симметричных трехфазных систем.

Для рассмотрения важнейшего **свойства уравнированности** трехфазной системы, которое будет доказано далее, введем понятие симметрии многофазной системы.

Система ЭДС (напряжений, токов и т.д.) называется **симметричной**, если она состоит из  **$m$**  одинаковых по модулю векторов ЭДС (напряжений, токов и т.д.), сдвинутых по фазе друг относительно друга на одинаковый угол  $\alpha = 2\pi/m$ . В частности векторная диаграмма для симметричной системы ЭДС, соответствующей трехфазной системе представлена на рисунке 121.

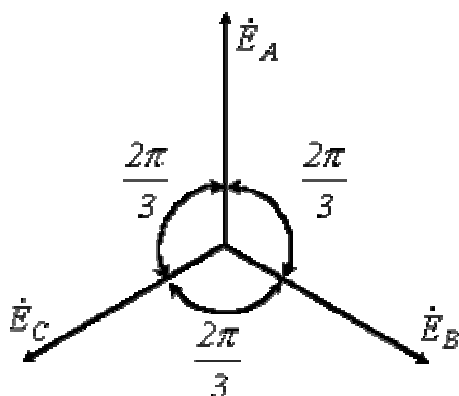


Рисунок 121- Векторная диаграмма симметричной трехфазной системы ЭДС

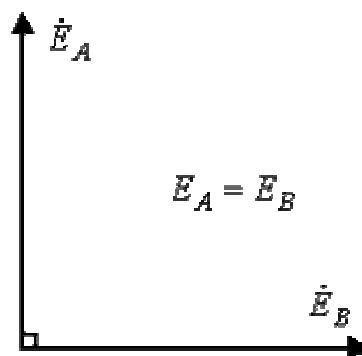


Рисунок 122 - Векторная диаграмма двухфазной системы ЭДС

Из несимметричных систем наибольший практический интерес представляет двухфазная система с 90-градусным сдвигом фаз (см. рисунок 122).

Все симметричные трех- и  $m$ -фазные ( $m > 3$ ) системы, а также двухфазная система являются **уравновешенными**. Это означает, что хотя в отдельных фазах мгновенная мощность пульсирует (см. рисунок 123,а), изменяя за время одного периода не только величину, но в общем случае и знак, суммарная мгновенная мощность всех фаз остается величиной

постоянной в течение всего периода синусоидальной ЭДС (см. рисунок 123,б).

Уравновешенность имеет важнейшее практическое значение. Если бы суммарная мгновенная мощность пульсировала, то на валу между турбиной и генератором действовал бы пульсирующий момент. Такая переменная механическая нагрузка вредно отражалась бы на энергогенерирующей установке, сокращая срок ее службы. Эти же соображения относятся и к многофазным электродвигателям.

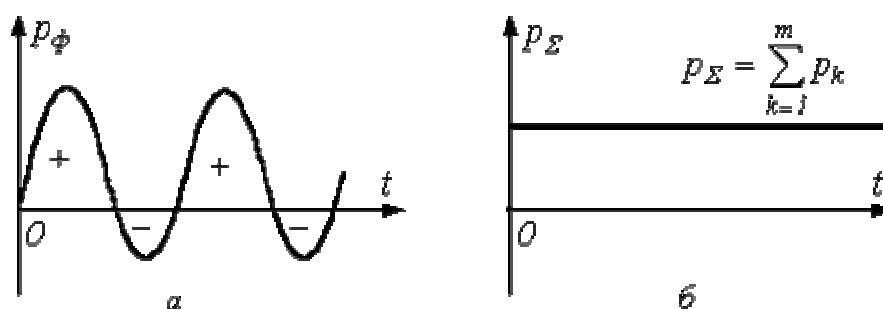


Рисунок 123 – Графики мощности

Если симметрия нарушается (двухфазная система Тесла в силу своей специфики в расчет не принимается), то нарушается и уравновешенность. Поэтому в энергетике строго следят за тем, чтобы нагрузка генератора оставалась симметричной.

### Схемы соединения трехфазных систем

Трехфазный генератор (трансформатор) имеет три выходные обмотки, одинаковые по числу витков, но развивающие ЭДС, сдвинутые по фазе на 120°. Можно было бы использовать систему, в которой фазы обмотки генератора не были бы гальванически соединены друг с другом. Это так называемая **несвязная система**. В этом случае каждую фазу генератора необходимо соединять с приемником двумя проводами, т.е. будет иметь место шестипроводная линия, что неэкономично. В этой связи подобные системы не получили широкого применения на практике.

Для уменьшения количества проводов в линии фазы генератора гальванически связывают между собой. Различают два вида соединений: **в звезду** и **в треугольник**. В свою очередь при соединении в звезду система может быть **трех-** и **четырёхпроводной**.

### Соединение в звезду

На рисунок 124 приведена трехфазная система при соединении фаз генератора и нагрузки в звезду. Здесь провода AA', BB' и CC' – линейные провода.

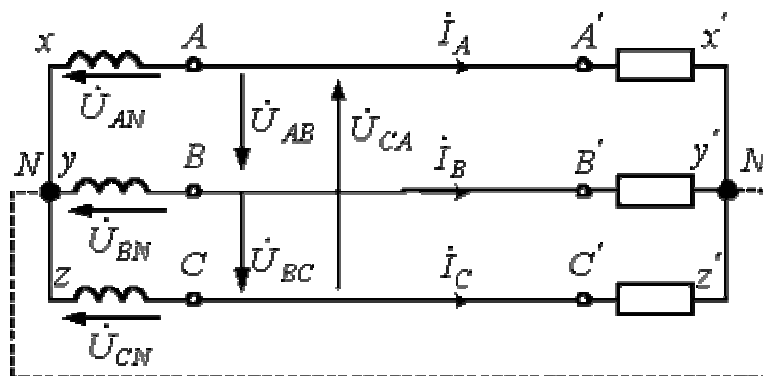


Рисунок 124 - Трехфазная система при соединении фаз генератора и нагрузки в звезду с нейтральным проводом

**Линейным** называется провод, соединяющий начала фаз обмотки генератора и приемника. Точка, в которой концы фаз соединяются в общий узел, называется **нейтральной** (на рисунке 124 N и N' – соответственно нейтральные точки генератора и нагрузки).

Провод, соединяющий нейтральные точки генератора и приемника, называется **нейтральным** (на рисунке 124 показан пунктиром). Трехфазная система при соединении в звезду без нейтрального провода называется **трехпроводной**, с нейтральным проводом – **четырёхпроводной**.

Все величины, относящиеся к фазам, носят название **фазных переменных**, к линии - **линейных**. Как видно из схемы на рисунке 124, при

соединении в звезду линейные токи  $\dot{I}_A, \dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  равны соответствующим фазным токам. При наличии нейтрального провода ток в нейтральном проводе  $\dot{I}_{NN} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$ . Если система фазных токов симметрична, то  $\dot{I}_{NN} = 0$ . Следовательно, если бы симметрия токов была гарантирована, то нейтральный провод был бы не нужен. Как будет показано далее, нейтральный провод обеспечивает поддержание симметрии напряжений на нагрузке при несимметрии самой нагрузки.

Поскольку напряжение на источнике противоположно направлению его ЭДС, фазные напряжения генератора (см. рисунок 124) действуют от точек А, В и С к нейтральной точке N;  $\dot{U}_{AN}, \dot{U}_{BN}, \dot{U}_{CN}$  - фазные напряжения нагрузки.

Линейные напряжения действуют между линейными проводами. В соответствии со вторым законом Кирхгофа для линейных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{BN}; \quad (3.1)$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{CN}; \quad (3.2)$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{AN}. \quad (3.3)$$

Отметим, что всегда  $\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0$  - как сумма напряжений по замкнутому контуру.

На рисунке 125 представлена векторная диаграмма для симметричной системы напряжений.





## Соединение в треугольник

В связи с тем, что значительная часть приемников, включаемых в трехфазные цепи, бывает несимметричной, очень важно на практике, например, в схемах с осветительными приборами, обеспечивать независимость режимов работы отдельных фаз. Кроме четырехпроводной, подобными свойствами обладают и трехпроводные цепи при соединении фаз приемника в треугольник. Но в треугольник также можно соединить и фазы генератора (см. рисунок 126,а).

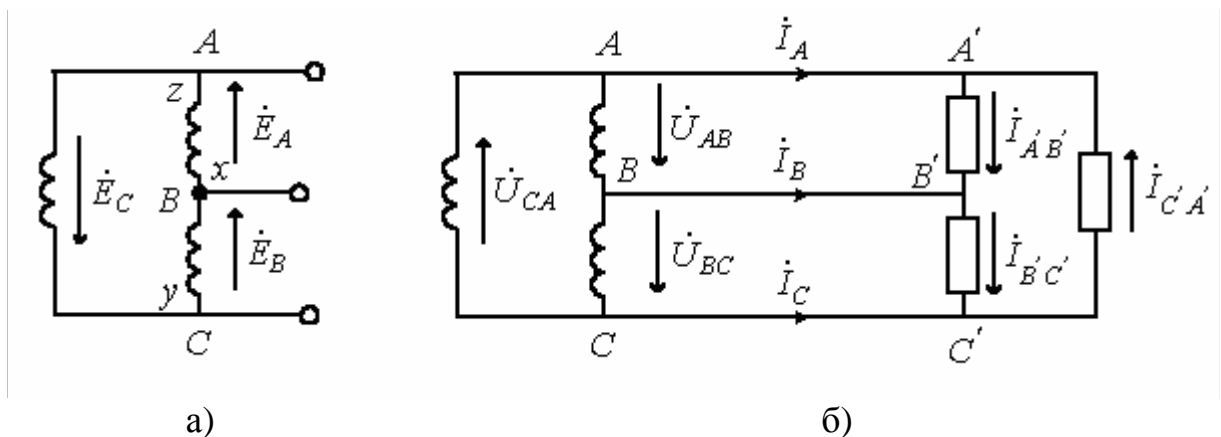


Рисунок 126 - Трехпроводные цепи при соединении фаз приемника в треугольник

Для симметричной системы ЭДС имеем

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

Таким образом, при отсутствии нагрузки в фазах генератора в схеме на рисунке 126,а токи будут равны нулю. Однако, если поменять местами начало и конец любой из фаз, то  $\sum \dot{E} \neq 0$  и в треугольнике будет протекать ток короткого замыкания. Следовательно, для треугольника нужно строго соблюдать порядок соединения фаз: начало одной фазы соединяется с концом другой.

Схема соединения фаз генератора и приемника в треугольник представлена на рисунке 126,б.

Очевидно, что при соединении в треугольник линейные напряжения равны соответствующим фазным. По первому закону Кирхгофа связь между линейными и фазными токами приемника определяется соотношениями

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{A'B'} - \dot{I}_{C'A'};$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{B'C'} - \dot{I}_{A'B'};$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{C'A'} - \dot{I}_{B'C'}.$$

Аналогично можно выразить линейные токи через фазные токи генератора.

На рисунке 127 представлена векторная диаграмма симметричной системы линейных и фазных токов.

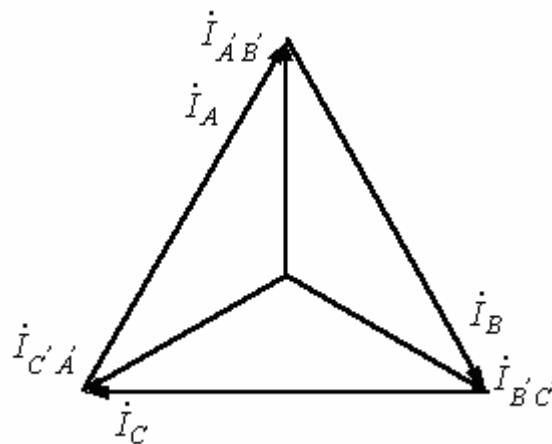


Рисунок 127 - Векторная диаграмма симметричной системы линейных и фазных токов

Ее анализ показывает, что при симметрии токов

$$I_\lambda = \sqrt{3}I_\phi. \quad (3.5)$$

В заключение отметим, что помимо рассмотренных соединений «звезда - звезда» и «треугольник - треугольник» на практике также применяются схемы «звезда - треугольник» и «треугольник - звезда».

### Контрольные вопросы

1. Какой принцип действия у трехфазного генератора?
2. В чем заключаются основные преимущества трехфазных систем?
3. Какие системы обладают свойством уравновешенности, в чем оно выражается?
4. Какие существуют схемы соединения в трехфазных цепях?
5. Какие соотношения между фазными и линейными величинами имеют место при соединении в звезду и в треугольник?
6. Что будет, если поменять местами начало и конец одной из фаз генератора при соединении в треугольник, и почему?

## 3.2 Расчет трехфазных цепей

Трехфазные цепи являются разновидностью цепей синусоидального тока, и, следовательно, все рассмотренные ранее методы расчета и анализа в символической форме в полной мере распространяются на них. Анализ трехфазных систем удобно осуществлять с использованием векторных диаграмм, позволяющих достаточно просто определять фазовые сдвиги между переменными. Однако определенная специфика многофазных цепей вносит характерные особенности в их расчет, что, в первую очередь, касается анализа их работы в симметричных режимах.

### 3.2.1 Расчет симметричных режимов работы трехфазных систем

Многофазный приемник и вообще многофазная цепь называются **симметричными**, если в них комплексные сопротивления соответствующих фаз одинаковы, т.е. если  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C$ . В противном случае они являются **несимметричными**. Равенство модулей указанных сопротивлений не является достаточным условием симметрии цепи. Так, например трехфазный приемник на рисунке 128,а является симметричным, а на рисунке 128,б – нет даже при условии:  $R = X_L = X_C$ .

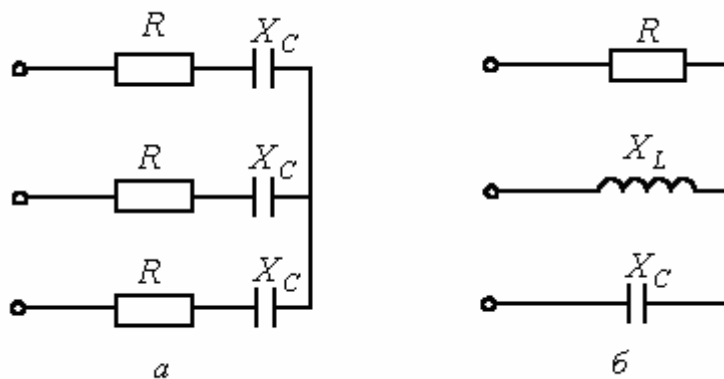


Рисунок 128 – Трехфазные симметричные приемники

Если к симметричной трехфазной цепи приложена симметричная трехфазная система напряжений генератора, то в ней будет иметь место симметричная система токов. Такой режим работы трехфазной цепи называется **симметричным**. В этом режиме токи и напряжения соответствующих фаз равны по модулю и сдвинуты по фазе друг по отношению к другу на угол  $\pm 2\pi/3$ . Вследствие указанного расчет таких цепей проводится для одной – **базовой** – фазы, в качестве которой обычно принимают фазу А. При этом соответствующие величины в других фазах получают формальным добавлением к аргументу переменной фазы А фазового сдвига  $\pm 2\pi/3$  при сохранении неизменным ее модуля.

Так для симметричного режима работы цепи на рисунке 129,а при известных линейном напряжении и сопротивлениях фаз  $\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{BC} = \underline{Z}_{CA} = \underline{Z}$  можно записать

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}} = I e^{j\varphi},$$

где  $\varphi$  определяется характером нагрузки  $\underline{Z}$ .

Тогда на основании вышесказанного

$$\dot{I}_{BC} = \dot{I}_{AB} e^{-j120^\circ} = I e^{j(\varphi - 120^\circ)};$$

$$\dot{I}_{CA} = \dot{I}_{AB} e^{j120^\circ} = I e^{j(\varphi+120^\circ)}.$$

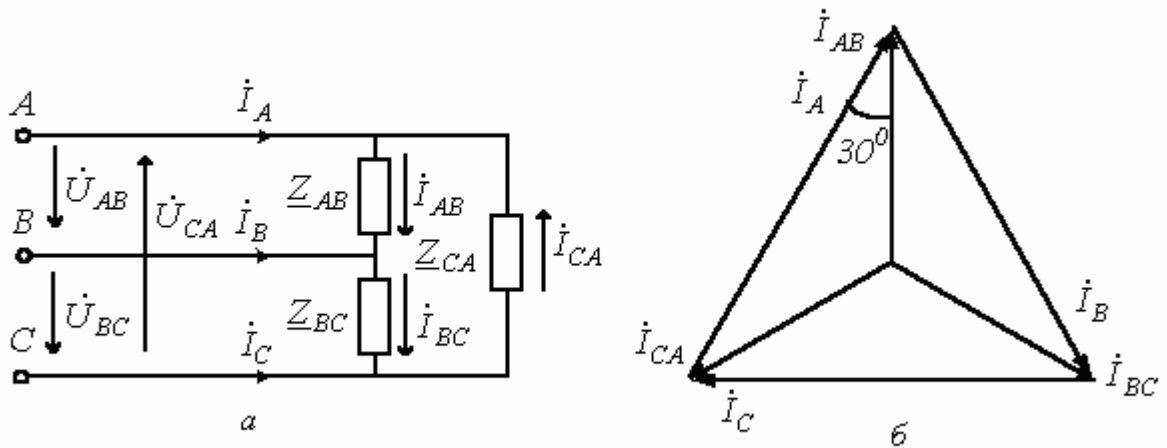


Рисунок 129 – Схема и векторная диаграмма  
для симметричного режима

Комплексы линейных токов можно найти с использованием векторной диаграммы на рисунке 129,б, из которой вытекает:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \sqrt{3} \dot{I}_{AB} e^{-j30^\circ} = \sqrt{3} I e^{j(\varphi-30^\circ)}; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_A e^{-j120^\circ} = \sqrt{3} I e^{j(\varphi-150^\circ)}; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_A e^{j120^\circ} = \sqrt{3} I e^{j(\varphi+90^\circ)}.\end{aligned}$$

При анализе сложных схем, работающих в симметричном режиме, расчет осуществляется с помощью двух основных приемов:

Все треугольники заменяются эквивалентными звездами. Поскольку треугольники симметричны, то в соответствии с формулами преобразования «треугольник-звезда»  $\underline{Z}_\perp = Z_\Delta / 3$ .

Так как все исходные и вновь полученные звезды нагрузки симметричны, то потенциалы их нейтральных точек одинаковы. Следовательно, без изменения режима работы цепи их можно (мысленно) соединить нейтральным проводом. После этого из схемы выделяется базовая фаза (обычно фаза А), для которой и осуществляется расчет, по результатам которого определяются соответствующие величины в других фазах.

Пусть, например, при заданном фазном напряжении  $U_\Phi$  необходимо определить линейные токи  $\dot{I}_A, \dot{I}_B$  и  $\dot{I}_C$  в схеме на рисунке 130, все сопротивления в которой известны.

В соответствии с указанной методикой выделим расчетную фазу А, которая представлена на рисунке 131. Здесь  $\dot{E}_A = U_\Phi$ ,  $\underline{Z}'_4 = \underline{Z}_4/3$ ;  $\underline{Z}'_6 = \underline{Z}_6/3$ .

Тогда для тока  $\dot{I}_A$  можно записать

$$\dot{I}_A = \frac{U_\Phi}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3 (\underline{Z}_4/3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3) + \underline{Z}_2 \underline{Z}_4 (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3)/3}{(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3)(\underline{Z}_4/3 + \underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3) + \underline{Z}_4 (\underline{Z}_5 + \underline{Z}_6/3)/3}},$$

и соответственно  $\dot{I}_B = \dot{I}_A e^{-j120^\circ}$ ;  $\dot{I}_C = \dot{I}_A e^{j120^\circ}$ .

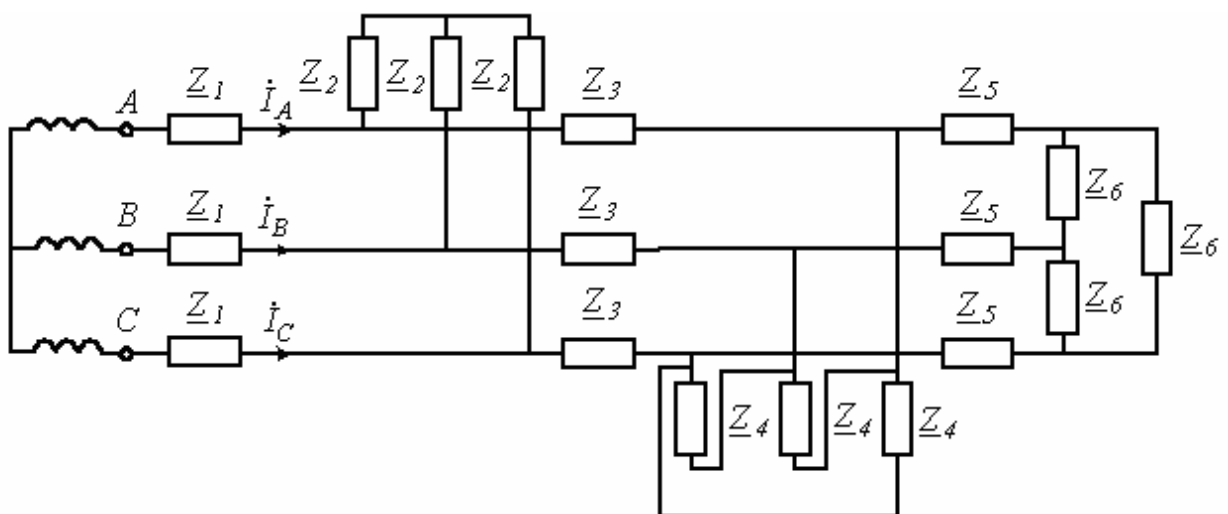


Рисунок 130 – Трехфазная симметричная сложная цепь

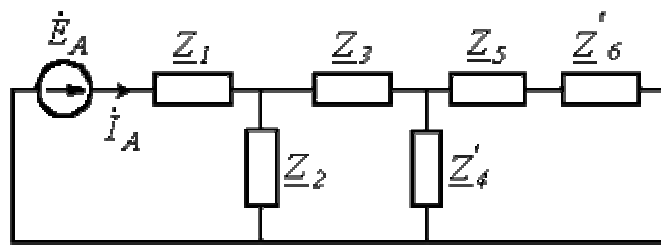


Рис. 4

Рисунок 131 – Схема фазы А

### 3.2.2 Расчет несимметричных режимов работы трехфазных систем

Если хотя бы одно из условий симметрии не выполняется, в трехфазной цепи имеет место несимметричный режим работы. Такие режимы при наличии в цепи только статической нагрузки и пренебрежении падением напряжения в генераторе рассчитываются для всей цепи в целом любым из рассмотренных ранее методов расчета. При этом фазные напряжения генератора заменяются соответствующими источниками ЭДС. Можно отметить, что, поскольку в многофазных цепях, помимо токов, обычно представляют интерес также потенциалы узлов, чаще других для расчета сложных схем применяется метод узловых потенциалов. Для анализа несимметричных режимов работы трехфазных цепей с электрическими машинами в основном применяется метод симметричных составляющих, который будет рассмотрен далее.

При заданных линейных напряжениях наиболее просто рассчитываются трехфазные цепи при соединении в треугольник. Пусть в схеме на рисунке 129,а  $\underline{Z}_{AB} \neq \underline{Z}_{BC} \neq \underline{Z}_{CA}$ . Тогда при известных комплексах линейных напряжений в соответствии с законом Ома

$$\dot{I}_{AB} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}}; \quad \dot{I}_{BC} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}}; \quad \dot{I}_{CA} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}}.$$

По найденным фазным токам приемника на основании первого закона Кирхгофа определяются линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC}.$$



Обычно на практике известны не комплексы линейных напряжений, а их модули. В этом случае необходимо предварительное определение начальных фаз этих напряжений, что можно осуществить, например, графически. Для этого, приняв  $\dot{U}_{AB} = U_{AB}e^{j0}$ , по заданным модулям напряжений, строим треугольник (см. рисунок 132), из которого (путем замера) определяем значения углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

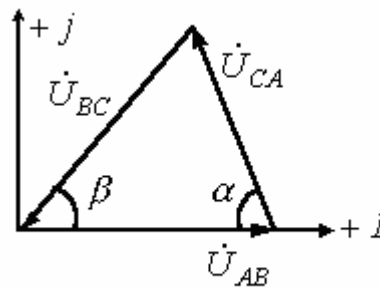


Рисунок 132 – Векторная диаграмма напряжений

Тогда

$$\begin{aligned}\dot{U}_{BC} &= U_{BC}e^{-j(\pi-\beta)}; \\ \dot{U}_{CA} &= U_{CA}e^{j(\pi-\alpha)}.\end{aligned}$$

Искомые углы  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть также найдены аналитически на основании теоремы косинусов:

$$\begin{aligned}U_{BC}^2 &= U_{AB}^2 + U_{CA}^2 - 2U_{AB}U_{CA}\cos\alpha; \\ U_{CA}^2 &= U_{AB}^2 + U_{BC}^2 - 2U_{AB}U_{BC}\cos\beta.\end{aligned}$$

При соединении фаз генератора и нагрузки в звезду и наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением фазные напряжения нагрузки равны соответствующим напряжениям на фазах источника. В этом случае фазные токи легко определяются по закону Ома, т.е. путем деления известных напряжений на фазах потребителя на соответствующие сопротивления. Однако, если сопротивление нейтрального провода велико или он отсутствует, требуется более сложный расчет.

Рассмотрим трехфазную цепь на рисунке 133,а. При симметричном питании и несимметричной нагрузке ( $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$ ) ей в общем случае будет соответствовать векторная диаграмма напряжений (см. рисунок 133,б), на которой нейтральные точки источника и приемника занимают разные положения, т.е.  $\phi_N \neq \phi_{N'}$ .

Разность потенциалов нейтральных точек генератора и нагрузки называется **напряжением смещения нейтральной точки** (обычно принимается, что  $\phi_N = 0$ ) или просто **напряжением смещения нейтрали**. Чем оно больше, тем сильнее несимметрия фазных напряжений на нагрузке, что наглядно иллюстрирует векторная диаграмма на рисунке 133,б.

Для расчета токов в цепи на рисунке 133,а необходимо знать напряжение смещения нейтрали. Если оно известно, то напряжения на фазах нагрузки равны:

$$\dot{U}_{AN'} = \dot{U}_{AN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{BN'} = \dot{U}_{BN} - \dot{U}_{N'N}; \quad \dot{U}_{CN'} = \dot{U}_{CN} - \dot{U}_{N'N}.$$

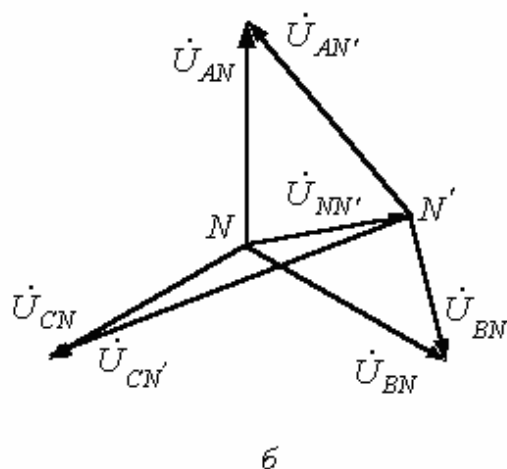
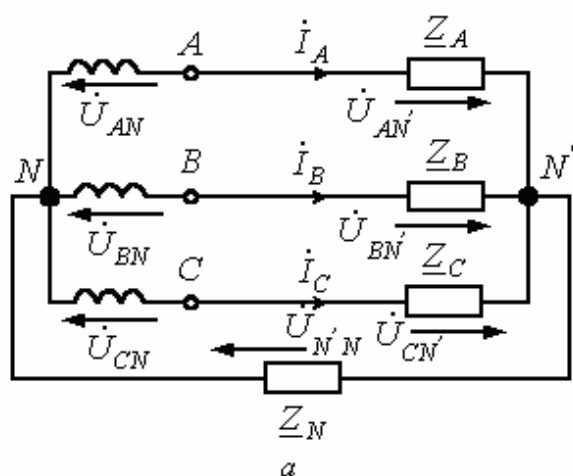


Рисунок 133 – Схема и векторная диаграмма для несимметричной трехфазной цепи

Тогда для искомых токов можно записать:

$$\dot{I}_A = \dot{U}_{AN'} \underline{Y}_A; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_{BN'} \underline{Y}_B; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_{CN'} \underline{Y}_C.$$

Соотношение для напряжения смещения нейтрали, записанное на основании метода узловых потенциалов, имеет вид

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AN} \underline{Y}_A + \dot{U}_{BN} \underline{Y}_B + \dot{U}_{CN} \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}. \quad (3.6)$$

При наличии нейтрального провода с нулевым сопротивлением  $\underline{Y}_N \rightarrow \infty$ , и из (3.6)  $\dot{U}_{N'N} = 0$ . В случае отсутствия нейтрального провода  $\underline{Y}_N = 0$ . При симметричной нагрузке ( $\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C$ ) с учетом того, что  $\dot{U}_{AN} + \dot{U}_{BN} + \dot{U}_{CN} = 0$ , из (3.6) вытекает  $\dot{U}_{N'N} = 0$ .

В качестве примера анализа несимметричного режима работы цепи с использованием соотношения (3.6) определим, какая из ламп в схеме на рисунке 133 с прямым чередованием фаз источника будет гореть ярче, если  $R = X_L = X_C$ .

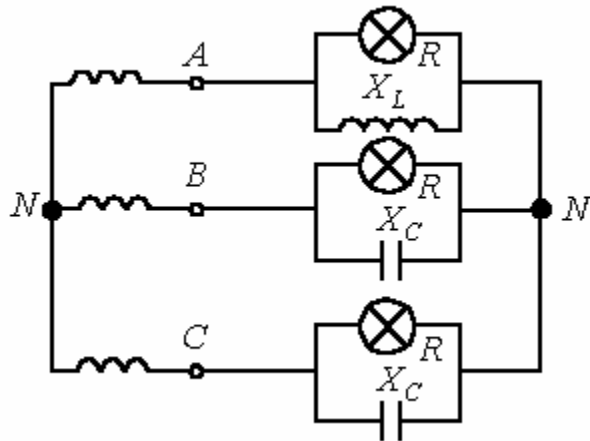


Рисунок 133 – Несимметричная трехфазная цепь

Запишем выражения комплексных сопротивлений фаз нагрузки:

$$\underline{Z}_A = \frac{RjX_L}{R + jX_L} = \frac{jR}{1 + j} = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{j45^\circ};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \frac{R(-jX_C)}{R - jX_C} = \frac{-jR}{1 - j} = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{-j45^\circ}.$$

Тогда для напряжения смещения нейтрали будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{U}_{NN} &= \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}_A} + \frac{\dot{U}_B}{\underline{Z}_B} + \frac{\dot{U}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{U_\phi \sqrt{2} \left( \frac{1}{e^{j45^\circ}} + \frac{e^{-j120^\circ}}{e^{-j45^\circ}} + \frac{e^{j120^\circ}}{e^{-j45^\circ}} \right)}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \\ &= \frac{U_\phi \sqrt{2} \left( \frac{1}{e^{j45^\circ}} + \frac{2}{e^{-j45^\circ}} \right)}{\frac{1}{\underline{Z}_A} + \frac{1}{\underline{Z}_B} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \\ &= U_\phi \frac{e^{-j45^\circ} + e^{-j135^\circ} + e^{j165^\circ}}{e^{-j45^\circ} + 2e^{j45^\circ}} = 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ}.\end{aligned}$$

Напряжения на фазах нагрузки (здесь и далее индекс N у фазных напряжений источника опускается)

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AN} &= \dot{U}_A - \dot{U}_{NN} = U_\phi - 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ} = 1,34U_\phi e^{j26,6^\circ}; \\ \dot{U}_{BN} &= \dot{U}_B - \dot{U}_{NN} = U_\phi e^{-j120^\circ} - 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ} = 0,4U_\phi e^{j221,6^\circ}; \\ \dot{U}_{CN} &= \dot{U}_C - \dot{U}_{NN} = U_\phi e^{j120^\circ} - 0,632U_\phi e^{-j108,43^\circ} = 1,5U_\phi e^{j101,6^\circ}.\end{aligned}$$

Таким образом, наиболее ярко будет гореть лампочка в фазе C.

В заключение отметим, что если при соединении в звезду задаются линейные напряжения (что обычно имеет место на практике), то с учетом того, что сумма последних равна нулю, их можно однозначно задать с помощью двух источников ЭДС, например,  $\dot{E}_A = \dot{U}_{AC}$  и  $\dot{E}_B = \dot{U}_{BC}$ . Тогда, поскольку при этом  $\dot{E}_C = 0$ , соотношение (3.6) трансформируется в формулу

$$\dot{U}_{N'N} = \frac{\dot{U}_{AC} \underline{Y}_A + \dot{U}_{BC} \underline{Y}_B}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} . \quad (3.7)$$

### Контрольные вопросы

1. Какой многофазный приемник является симметричным?
2. Какой режим работы трехфазной цепи называется симметричным?
3. В чем заключается специфика расчета симметричных режимов работы трехфазных цепей?
4. С помощью каких приемов трехфазная симметричная схема сводится к расчетной однофазной?
5. Что такое напряжение смещения нейтрали, как оно определяется?
6. Как можно определить комплексы линейных напряжений, если заданы их модули?

### 3.3 Применение векторных диаграмм для анализа несимметричных режимов

Несимметричные режимы в простейших характерных случаях (короткое замыкание и холостой ход) могут быть проанализированы на основе построения векторных диаграмм.

Рассмотрим режимы обрыва и короткого замыкания фазы при соединении в звезду для трех- и четырехпроводной систем. При этом будем проводить сопоставление с симметричным режимом работы цепи, фазные напряжения и токи в которой будут базовыми. Для этой цепи (см. рисунок 134,а) векторная диаграмма токов и напряжений приведена на рисунке 134,б (принято, что нагрузка  $\underline{Z}$  носит активно-индуктивный характер). Здесь

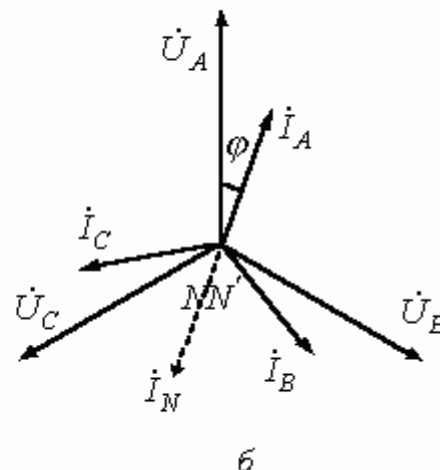
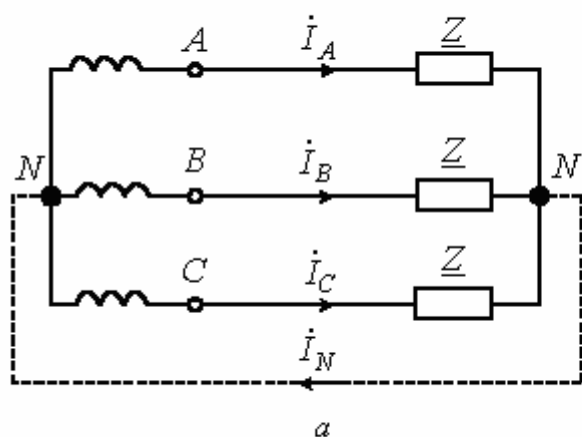


Рисунок 134 – Схема и векторная диаграмма несимметричной трехфазной цепи

$$\dot{I}_A = \frac{U_\Phi}{Z} e^{-j\varphi} = I_\Phi e^{-j\varphi}; \quad \dot{I}_B = I_\Phi e^{-j(120^\circ + \varphi)}; \quad \dot{I}_C = I_\Phi e^{-j(\varphi - 120^\circ)}$$

При обрыве фазы А нагрузки приходим к векторной диаграмме на рисунке 135.

В этом случае

$$\dot{I}_A = 0; \quad \dot{U}_{BN'} = -\dot{U}_{CN'} = \frac{\sqrt{3}}{2} U_\Phi e^{-j90^\circ}; \quad \dot{I}_B = -\dot{I}_C = \frac{\sqrt{3}}{2} I_\Phi e^{-j(90^\circ + \varphi)}$$

При коротком замыкании фазы А (трехпроводная система) имеет место векторная диаграмма на рисунке 136.

Из нее вытекает:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{BN'} &= \sqrt{3} U_\Phi e^{-j150^\circ}; \quad \dot{U}_{CN'} = \sqrt{3} U_\Phi e^{j150^\circ}; \quad \dot{I}_B = \sqrt{3} I_\Phi e^{-j(150^\circ + \varphi)}; \\ \dot{I}_C &= \sqrt{3} I_\Phi e^{j(150^\circ - \varphi)}; \quad \dot{I}_A = 3 I_\Phi e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

При обрыве фазы А в четырехпроводной системе (нейтральный провод на рис. 1,а показан пунктиром, а вектор тока  $\dot{I}_N$  - пунктиром на рисунке 134,б)

$$\dot{I}_A = 0; \dot{I}_B = I_\phi e^{-j(120^\circ + \varphi)}; \dot{I}_C = I_\phi e^{-j(\varphi - 120^\circ)}; \dot{I}_N = I_\phi e^{-j(\varphi + 120^\circ)}.$$

Симметричный трехфазный приемник при соединении в треугольник и соответствующая этому случаю векторная диаграмма напряжений и токов приведены на рисунке 137.

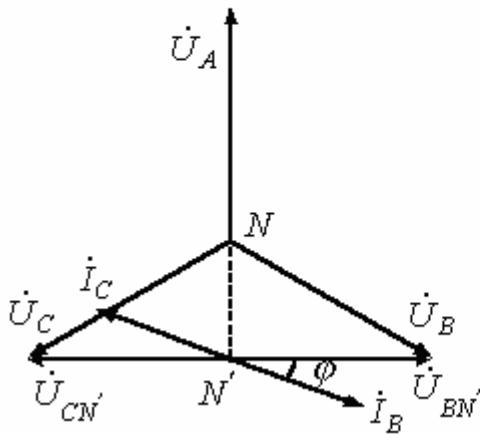


Рисунок 135 – Векторная при обрыве фазы А

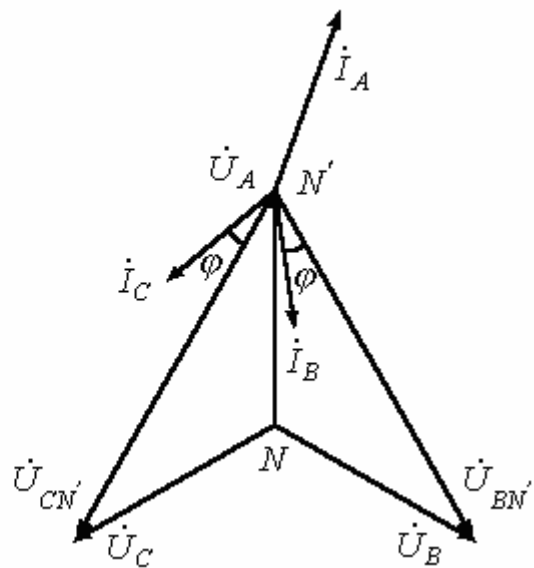


Рисунок 136 – Векторная диаграмма при коротком замыкании фазы А

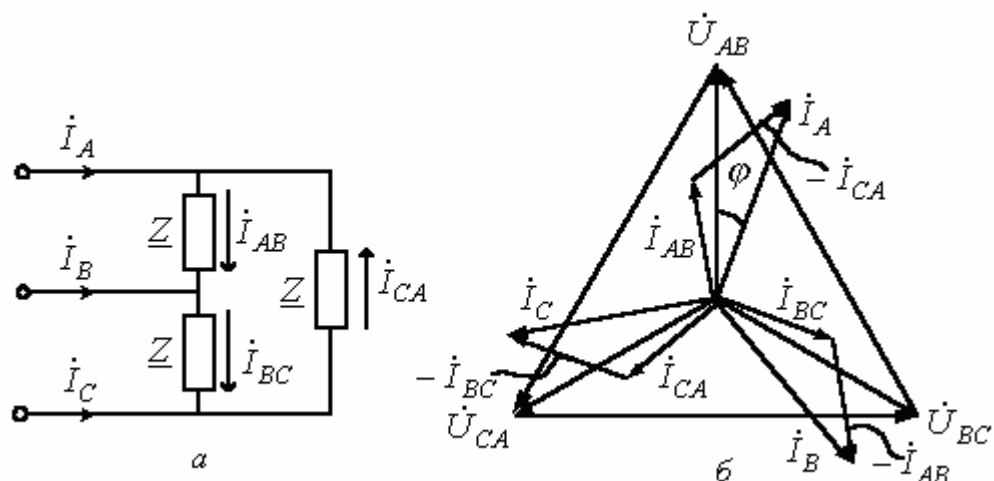


Рисунок 137 - Симметричный трехфазный приемник при соединении в треугольник и соответствующая этому случаю векторная диаграмма напряжений и токов

Здесь при том же способе соединения фаз генератора

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \sqrt{3}I_{\phi}e^{j(3\theta-\varphi)}; & \dot{I}_{BC} &= \sqrt{3}I_{\phi}e^{-j(90^{\circ}+\varphi)}; & \dot{I}_{CA} &= \sqrt{3}I_{\phi}e^{j(150^{\circ}-\varphi)}; \\ \dot{I}_A &= 3I_{\phi}e^{-j\varphi}; & \dot{I}_B &= 3I_{\phi}e^{-j(120^{\circ}+\varphi)}; & \dot{I}_C &= 3I_{\phi}e^{-j(\varphi-120^{\circ})}. \end{aligned}$$

При обрыве провода в фазе А-В нагрузки, как это видно из схемы на рисунке 138,  $\dot{I}_A = -\dot{I}_{CA}$ ;  $\dot{I}_B = \dot{I}_{BC}$ , при этом сами токи  $\dot{I}_{BC}$  и  $\dot{I}_{CA}$  в силу автономности режима работы фаз при соединении нагрузки в треугольник такие же, как и в цепи на рисунке 137,а.

Таким образом,

$$\dot{I}_A = \sqrt{3}I_{\phi}e^{-j(\varphi+30^{\circ})}; \quad \dot{I}_B = \sqrt{3}I_{\phi}e^{-j(90^{\circ}+\varphi)}; \quad \dot{I}_C = 3I_{\phi}e^{-j(\varphi-120^{\circ})}.$$



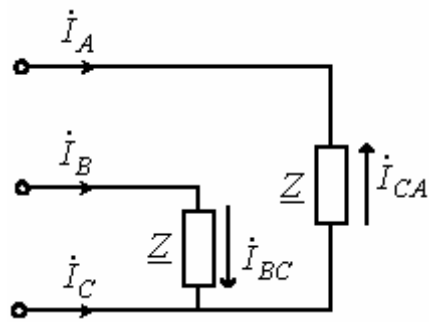


Рисунок 138 – Схема при обрыве провода в фазе А-В нагрузки

Цепь при обрыве линейного провода А-А' и соответствующая этому случаю векторная диаграмма приведены на рисунке 139.

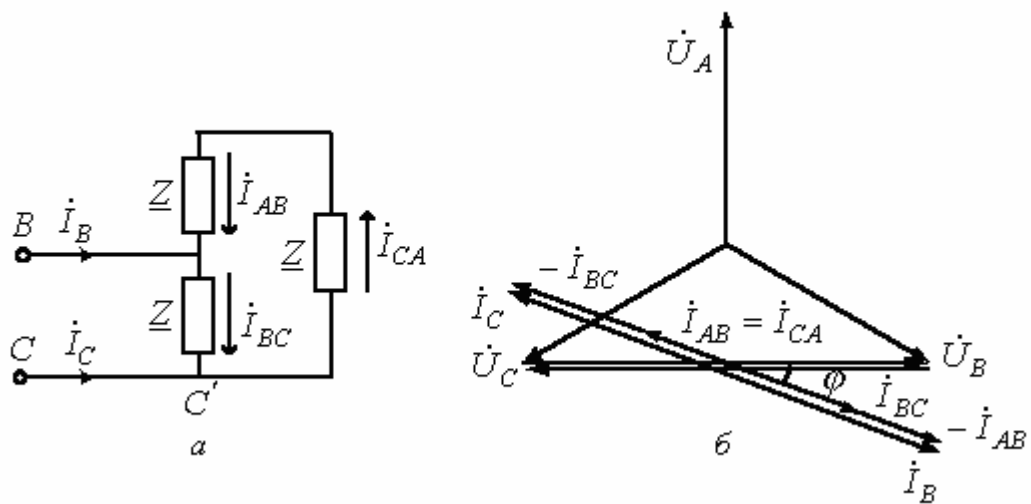


Рисунок 139 – Цепь при обрыве линейного провода А-А' и соответствующая этому случаю векторная диаграмма

Здесь

$$\dot{I}_{AB} = \dot{I}_{CA} = \frac{\sqrt{3}U_{\phi}}{2Z} e^{j(90^{\circ}-\varphi)} = \frac{\sqrt{3}}{2} I_{\phi} e^{j(90^{\circ}-\varphi)}; \quad \dot{I}_{BC} = \sqrt{3} I_{\phi} e^{-j(90^{\circ}+\varphi)};$$

$$\dot{I}_B = -\dot{I}_C = 1,5\sqrt{3} I_{\phi} e^{-j(90^{\circ}+\varphi)}.$$

### 3.4 Мощность в трехфазных цепях

Мгновенная мощность трехфазного источника энергии равна сумме мгновенных мощностей его фаз:

$$P = P_A + P_B + P_C = u_A i_A + u_B i_B + u_C i_C.$$

Активная мощность генератора, определяемая как среднее за период значение мгновенной мощности, равна

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = P_A + P_B + P_C = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C.$$

Соответственно активная мощность трехфазного приемника с учетом потерь в сопротивлении нейтрального провода

$$P = P_a + P_b + P_c + P_N,$$

реактивная

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c + Q_N$$

и полная

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Суммарная активная мощность симметричной трехфазной системы

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos \varphi. \quad (3.8)$$

Учитывая, что в симметричном режиме для звезды имеют место соотношения

$$U_n = \sqrt{3}U_{\phi}; \quad \dot{I}_n = \dot{I}_{\phi}$$

и для треугольника -

$$\dot{U}_n = \dot{U}_\phi; \quad I_n = \sqrt{3}I_\phi$$

на основании (3.8) для обоих способов соединения фаз получаем

$$P = \sqrt{3}U_n I_n \cos \varphi,$$

где  $\varphi$ - угол сдвига между фазными напряжением и током.

Аналогично

$$Q = \sqrt{3}U_n I_n \sin \varphi;$$

$$S = \sqrt{3}U_n I_n.$$

Докажем теперь указанное ранее свойство уравновешенности двухфазной системы Тесла и симметричной трехфазной системы.

### 1. Двухфазная система Тесла

В соответствии с рисунком 140

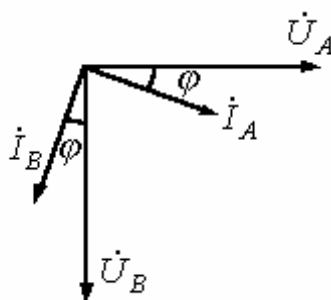


Рисунок 140 – Векторная диаграмма

$$u_A = U_m \sin \omega t; \quad i_A = I_m \sin(\omega t - \varphi);$$

$$u_B = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right); \quad i_B = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

$$p_A = u_A i_A = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= UI(\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)); \quad (3.9)$$

$$p_B = u_B i_B = U_m I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \varphi\right) =$$

$$= UI(\cos \varphi + \cos(2\omega t - \varphi)). \quad (3.10)$$

С учетом (3.9) и (3.10)

$$p = p_A + p_B = 2UI \cos \varphi = \text{const}.$$

Таким образом, суммарная мгновенная мощность фаз есть величина постоянная, равная суммарной активной мощности источника.

## 2. Симметричная трехфазная цепь

$$u_A = U_m \sin \omega t; \quad i_A = I_m \sin(\omega t - \varphi);$$

$$u_B = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \quad i_B = I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right);$$

$$u_C = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right); \quad i_C = I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right).$$

Тогда

$$p_A = u_A i_A = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = UI(\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi));$$

$$p_B = u_B i_B = U_m I_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = UI\left(\cos \varphi - \cos\left(2\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right);$$

$$p_C = u_C i_C = U_m I_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = UI\left(\cos \varphi - \cos\left(2\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi\right)\right).$$

Отсюда

$$P = P_A + P_B + P_C = 3UI \cos \varphi = \text{const} ,$$

т.е. и для симметричной трехфазной цепи свойство уравниваемости доказано.

### 3.5 Измерение мощности в трехфазных цепях

Ниже рассмотрены практические схемы включения ваттметров для измерения мощности в трехфазных цепях.

1. Четырехпроводная система, несимметричный режим.

Представленная на рисунке 141 схема называется **схемой трех ваттметров**.

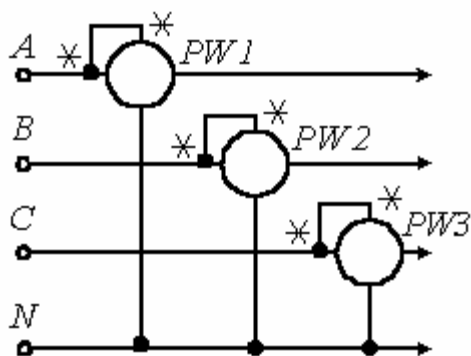


Рисунок 141 – Схема трех ваттметров

Суммарная активная мощность цепи определяется как сумма показаний трех ваттметров

$$P = P_A + P_B + P_C .$$

2. Четырехпроводная система, симметричный режим.

Если режим работы цепи симметричный, то для определения суммарной активной мощности достаточно ограничиться одним ваттметром (любым), включаемым по схеме на рисунке 141. Тогда, например, при включении прибора в фазу А,

$$P = 3P_A. \quad (3.11)$$

### 3. Трехпроводная система, симметричный режим.

При отсутствии доступа к нейтральной точке последняя создается искусственно с помощью включения трех дополнительных резисторов по схеме «звезда», как показано на рисунке 142 – **схема ваттметра с искусственной нейтральной точкой**. При этом необходимо выполнение условия  $R = R_I + R_V$ , где  $R_V$  – собственное сопротивление обмотки ваттметра. Тогда суммарная активная мощность трехфазной системы определяется согласно (3.11).

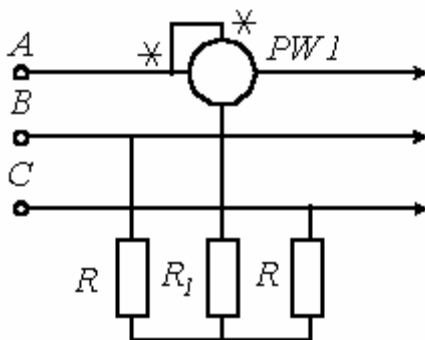


Рисунок 142 - Схема ваттметра с искусственной нейтральной точкой

### 4. Трехпроводная система, симметричный режим; измерение реактивной мощности.

С помощью одного ваттметра при симметричном режиме работы цепи можно измерить ее реактивную мощность. В этом случае схема включения ваттметра будет иметь вид по рисунку 143,а.

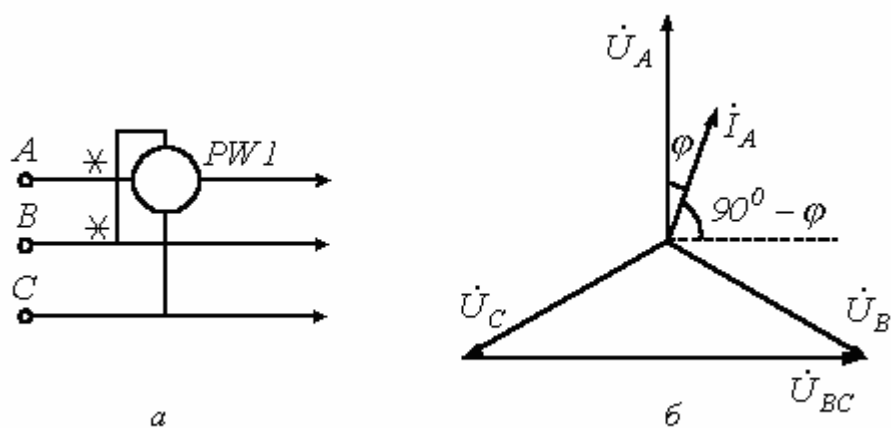


Рисунок 143- Схема измерения реактивной мощности  
и векторная диаграмма

Согласно векторной диаграмме на рисунке 143,б измеряемая прибором мощность

$$P_I = U_{\pi} I_{\pi} \cos(90^{\circ} - \varphi) = U_{\pi} I_{\pi} \sin \varphi = \frac{Q}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, суммарная реактивная мощность

$$Q = \sqrt{3} P_I.$$

## 5. Трехпроводная система, несимметричный режим.

Представленная на рисунке 144 схема называется схемой двух ваттметров. В ней сумма показаний приборов равна суммарной активной мощности цепи.

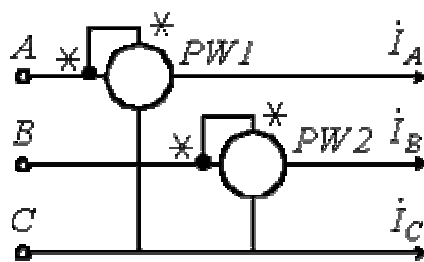


Рисунок 144 – Схема измерения двумя ваттметрами

Действительно, показания приборов в данной схеме:

$$P_1 = \operatorname{Re} \left( \dot{U}_{AC}^* I_A \right); \quad P_2 = \operatorname{Re} \left( \dot{U}_{BC}^* I_B \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 = \operatorname{Re} \left( \dot{U}_{AC}^* I_A + \dot{U}_{BC}^* I_B \right) = \operatorname{Re} \left( (\dot{U}_A - \dot{U}_C)^* I_A + (\dot{U}_B - \dot{U}_C)^* I_B \right) = \\ &= \operatorname{Re} \left( \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B - \dot{U}_C^* (I_A + I_B) \right) = \operatorname{Re} \left( \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B + \dot{U}_C^* I_C \right) = P_A + P_B + P_C. \end{aligned}$$

В заключение отметим, что если в схеме на рисунке 144 имеет место симметричный режим работы, то на основании показаний приборов можно определить суммарную реактивную мощность цепи

$$Q = \sqrt{3} (P_1 - P_2). \quad (3.12)$$

### Контрольные вопросы

1. В симметричной трехпроводной цепи произошел обрыв фазы. Что покажет вольтметр, включенный между нейтральными точками источника и приемника?
2. Во сколько раз мощность в цепи при соединении звездой меньше мощности в цепи при соединении треугольником?
3. Какую схему измерения мощности можно применить при симметричной и несимметричной нагрузках?



### 3.6 Метод симметричных составляющих

Метод симметричных составляющих относится к специальным методам расчета трехфазных цепей и широко применяется для анализа несимметричных режимов их работы, в том числе с нестатической нагрузкой. В основе метода лежит представление несимметричной трехфазной системы переменных (ЭДС, токов, напряжений и т.п.) в виде суммы трех симметричных систем, которые называют **симметричными составляющими**. Различают симметричные составляющие **прямой, обратной и нулевой** последовательностей, которые различаются порядком чередования фаз.

Симметричную систему прямой последовательности образуют (см. рисунок 145,а) три одинаковых по модулю вектора  $\dot{A}_1, \dot{B}_1$  и  $\dot{C}_1$  со сдвигом друг по отношению к другу на  $2\pi/3$  рад., причем  $\dot{B}_1$  отстает от  $\dot{A}_1$ , а  $\dot{C}_1$  - от  $\dot{B}_1$ .

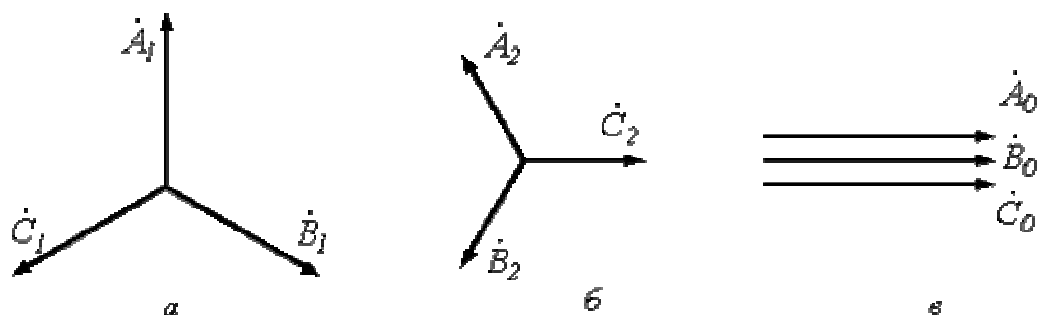


Рисунок 145 – Система прямой, обратной и нулевой последовательности

Введя, оператор поворота  $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ , для симметричной системы прямой последовательности можно записать

$$\dot{B}_1 = \underline{a}^2 \dot{A}_1; \quad \dot{C}_1 = \underline{a} \dot{A}_1.$$

Симметричная система обратной последовательности образована равными по модулю векторами  $\dot{A}_2, \dot{B}_2$  и  $\dot{C}_2$  с относительным сдвигом по фазе на  $2\pi/3$  рад., причем теперь  $\dot{C}_2$  отстает от  $\dot{A}_2$ , а  $\dot{B}_2$  - от  $\dot{C}_2$  (см. рисунок 145,б). Для этой системы имеем

$$\dot{B}_2 = \underline{a}\dot{A}_2; \quad \dot{C}_2 = \underline{a}^2\dot{A}_2.$$

Система нулевой последовательности состоит из трех векторов, одинаковых по модулю и фазе (см. рисунок 145,в):

$$\dot{A}_0 = \dot{B}_0 = \dot{C}_0.$$

При сложении трех указанных систем векторов получается несимметричная система векторов (см. рисунок 146).

Любая несимметричная система однозначно раскладывается на симметричные составляющие. Действительно,

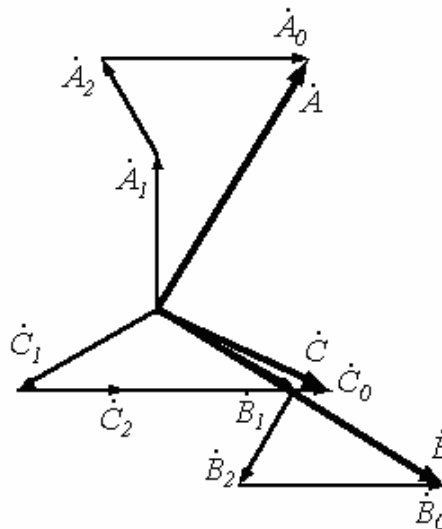


Рисунок 146 – Векторная диаграмма несимметричной системы

$$\dot{A} = \dot{A}_1 + \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \quad (3.13)$$

$$\dot{B} = \dot{B}_1 + \dot{B}_2 + \dot{B}_0 = \underline{a}^2 \dot{A}_1 + \underline{a} \dot{A}_2 + \dot{A}_0; \quad (3.14)$$

$$\dot{C} = \dot{C}_1 + \dot{C}_2 + \dot{C}_0 = \underline{a} \dot{A}_1 + \underline{a}^2 \dot{A}_2 + \dot{A}_0. \quad (3.15)$$

Таким образом, получена система из трех уравнений относительно трех неизвестных  $\dot{A}_1, \dot{A}_2, \dot{A}_0$ , которые, следовательно, определяются однозначно. Для нахождения  $\dot{A}_0$  сложим уравнения (3.13)...(3.15). Тогда, учитывая, что  $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$ , получим

$$\dot{A}_0 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \dot{B} + \dot{C}) \quad (3.16)$$

Для нахождения  $\dot{A}_1$  умножим (2) на  $\underline{a}$ , а (3) – на  $\underline{a}^2$ , после чего полученные выражения сложим с (1). В результате приходим к соотношению

$$\dot{A}_1 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \underline{a}\dot{B} + \underline{a}^2\dot{C}) \quad (3.17)$$

Для определения  $\dot{A}_2$  с соотношением (3.13) складываем уравнения (3.14) и (3.15), предварительно умноженные соответственно на  $\underline{a}^2$  и  $\underline{a}$ . В результате имеем:

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{3}(\dot{A} + \underline{a}^2\dot{B} + \underline{a}\dot{C}) \quad (3.18)$$

Формулы (3.13)...(3.18) справедливы для любой системы векторов  $\dot{A}, \dot{B}, \dot{C}$ , в том числе и для симметричной. В последнем случае  $\dot{A} = \dot{A}_1$ ;  $\dot{A}_2 = \dot{A}_0 = 0$ .

В заключение раздела отметим, что помимо вычисления симметричные составляющие могут быть измерены с помощью специальных фильтров симметричных составляющих, используемых в устройствах релейной защиты и автоматики.

## Свойства симметричных составляющих токов и напряжений различных последовательностей

Рассмотрим четырехпроводную систему на рисунке 147.

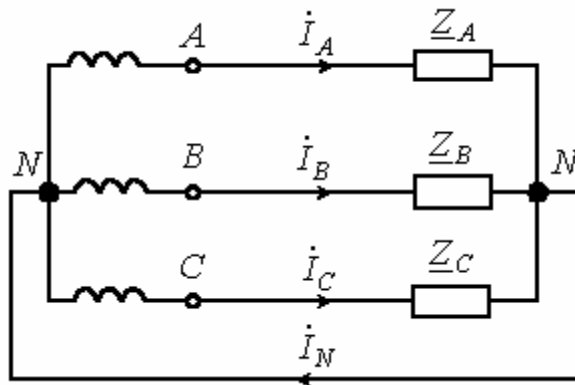


Рисунок 147 – Четырехпроводная система

Для тока в нейтральном проводе имеем

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Тогда с учетом (3.16)

$$\dot{I}_N = 3\dot{I}_0, \quad (3.19)$$

т.е. ток в нейтральном проводе равен утроенному току нулевой последовательности.

Если нейтрального провода нет, то  $\dot{I}_N = 0$  и соответственно нет составляющих тока нулевой последовательности.

Поскольку сумма линейных напряжений равна нулю, то в соответствии с (3.16) линейные напряжения не содержат составляющих нулевой последовательности.

Рассмотрим трехпроводную несимметричную систему на рисунке 148.

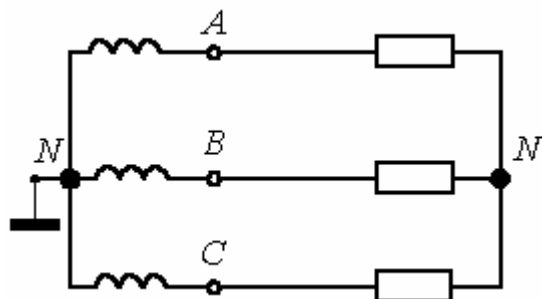


Рисунок 148 – Трехпроводная несимметричная система

Здесь

$$\begin{aligned}\dot{U}_{AN'} &= \dot{E}_A - \dot{U}_{N'N}; \\ \dot{U}_{BN'} &= \dot{E}_B - \dot{U}_{N'N}; \\ \dot{U}_{CN'} &= \dot{E}_C - \dot{U}_{N'N}.\end{aligned}$$

Тогда, просуммировав эти соотношения, для симметричных составляющих нулевой последовательности фазных напряжений можно записать

$$\dot{U}_{\phi 0} = \frac{\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C}{3} - \dot{U}_{N'N}.$$

Если система ЭДС генератора симметрична, то из последнего получаем

$$\dot{U}_{\phi 0} = -\dot{U}_{N'N}. \quad (3.20)$$

Из (3.20) вытекает:

- в фазных напряжениях симметричного приемника отсутствуют симметричные составляющие нулевой последовательности;

- симметричные составляющие нулевой последовательности фазных напряжений несимметричного приемника определяются величиной напряжения смещения нейтрали;
- фазные напряжения несимметричных приемников, соединенных звездой, при питании от одного источника различаются только за счет симметричных составляющих нулевой последовательности; симметричные составляющие прямой и обратной последовательностей у них одинаковы, поскольку однозначно связаны с соответствующими симметричными составляющими линейных напряжений.

При соединении нагрузки в треугольник фазные токи  $\dot{I}_{AB}$ ,  $\dot{I}_{BC}$  и  $\dot{I}_{CA}$  могут содержать симметричные составляющие нулевой последовательности  $\dot{I}_0$ . При этом  $\dot{I}_0$  (см. рисунок 149) циркулирует по контуру, образованному фазами нагрузки.

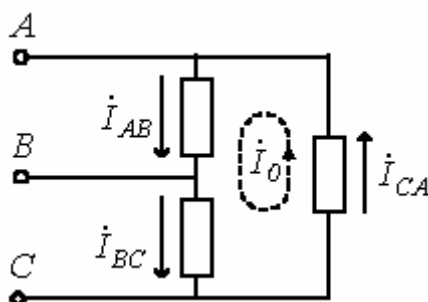


Рисунок 149 – Контур токов нулевой последовательности

### **Сопротивления симметричной трехфазной цепи для токов различных последовательностей**

Если к симметричной цепи приложена симметричная система фазных напряжений прямой (обратной или нулевой) последовательностей, то в ней возникает симметричная система токов прямой (обратной или нулевой) последовательности. При использовании метода симметричных составляющих на практике симметричные составляющие напряжений связаны с симметричными составляющими токов той же последовательности. Отношение симметричных составляющих фазных напряжений прямой (обратной или нулевой) последовательности к соответствующим симметричным составляющим токов называется **комплексным сопротивлением прямой**

$$\underline{Z}_1 = \frac{\dot{U}_{A1}}{\dot{I}_{A1}} = \frac{\dot{U}_{B1}}{\dot{I}_{B1}} = \frac{\dot{U}_{C1}}{\dot{I}_{C1}},$$

обратной

$$\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{A2}}{\dot{I}_{A2}} = \frac{\dot{U}_{B2}}{\dot{I}_{B2}} = \frac{\dot{U}_{C2}}{\dot{I}_{C2}}$$

и нулевой

$$\underline{Z}_0 = \frac{\dot{U}_{A0}}{\dot{I}_{A0}} = \frac{\dot{U}_{B0}}{\dot{I}_{B0}} = \frac{\dot{U}_{C0}}{\dot{I}_{C0}}$$

последовательностей.

Пусть имеем участок цепи на рисунке 150.

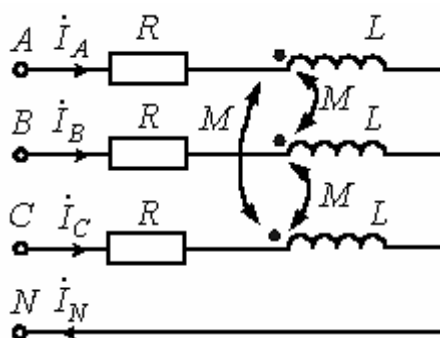


Рисунок 150 – Трехфазная цепь

Для фазы А этого участка можно записать

$$\dot{U}_A = (R + j\omega L)\dot{I}_A + j\omega M(\dot{I}_B + \dot{I}_C). \quad (3.21)$$

Тогда для симметричных составляющих прямой и обратной последовательностей с учетом, того, что  $\dot{I}_{A1(2)} + \dot{I}_{B1(2)} + \dot{I}_{C1(2)} = 0$ , на основании (3.21) имеем  $\dot{U}_{A1(2)} = (R + j\omega L - j\omega M)\dot{I}_{A1(2)}$ .

Отсюда комплексные сопротивления прямой и обратной последовательностей одинаковы и равны:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = R + j(\omega L - \omega M).$$

Для симметричных составляющих нулевой последовательности с учетом равенства  $\dot{I}_{AO} = \dot{I}_{BO} = \dot{I}_{CO}$  соотношение (3.21) трансформируется в уравнение

$$\dot{U}_{AO} = (R + j\omega L + 2j\omega M)\dot{I}_{AO},$$

откуда комплексное сопротивление нулевой последовательности

$$\underline{Z} = R + j(\omega L + 2\omega M).$$

В рассмотренном примере получено равенство сопротивлений прямой и обратной последовательностей. В общем случае эти сопротивления могут отличаться друг от друга. Наиболее типичный пример – различие сопротивлений вращающейся машины для токов прямой и обратной последовательностей за счет многократной разницы в скольжении ротора относительно вращающегося магнитного поля для этих последовательностей.

### 3.7 Применение метода симметричных составляющих для симметричных цепей

Расчет цепей методом симметричных составляющих основывается на принципе наложения, в виду чего метод применим только к линейным цепям. Согласно данному методу расчет осуществляется в отдельности для составляющих напряжений и токов различных последовательностей, причем в силу симметрии режимов работы цепи для них он проводится для одной фазы (фазы А). После этого в соответствии с (3.13)...(3.15) определяются реальные искомые величины. При расчете следует помнить, что, поскольку в симметричном режиме ток в нейтральном проводе равен нулю, сопротивление нейтрального провода никак ни влияет на симметричные составляющие токов прямой и обратной последовательностей. Наоборот, в схему замещения для нулевой последовательности на основании (3.19) вводится утроенное значение сопротивления в нейтральном проводе. С учетом вышесказанного исходной схеме на рисунке 151,а соответствуют расчетные однофазные цепи для прямой и обратной последовательностей (рисунок 151,б) и нулевой последовательности (рисунок 151,в).



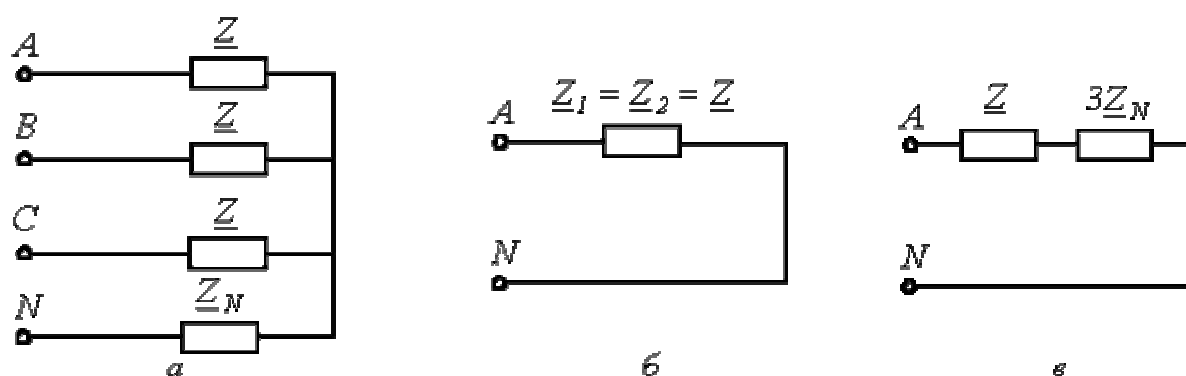


Рисунок 151 – Схемы замещения прямой, обратной и нулевой последовательности

Существенно сложнее обстоит дело при несимметрии сопротивлений по фазам. Пусть в цепи  $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$ . Разложив токи на симметричные составляющие, для данной цепи можно записать

$$\begin{aligned}\dot{U}_A &= \underline{Z}_A(\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0); \\ \dot{U}_B &= \underline{Z}_B(\underline{a}^2 \dot{I}_1 + \underline{a} \dot{I}_2 + \dot{I}_0); \\ \dot{U}_C &= \underline{Z}_C(\underline{a} \dot{I}_1 + \underline{a}^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0)\end{aligned}\quad (3.22)$$

В свою очередь

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \underline{a} \dot{U}_B + \underline{a}^2 \dot{U}_C); \\ \dot{U}_2 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \underline{a}^2 \dot{U}_B + \underline{a} \dot{U}_C); \\ \dot{U}_0 &= \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)\end{aligned}\quad (3.23)$$

Подставив в (3.23) значения соответствующих параметров из (3.22) после группировки членов получим

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \underline{Z}_{11}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{12}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{10}\dot{I}_0; \\ \dot{U}_2 &= \underline{Z}_{21}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{22}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{20}\dot{I}_0; \\ \dot{U}_0 &= \underline{Z}_{01}\dot{I}_1 + \underline{Z}_{02}\dot{I}_2 + \underline{Z}_{00}\dot{I}_0,\end{aligned}\tag{3.24}$$

где

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{11} &= \underline{Z}_{22} = \underline{Z}_{00} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C); \\ \underline{Z}_{12} &= \underline{Z}_{20} = \underline{Z}_{01} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_A + \underline{a}^2 \underline{Z}_B + \underline{a} \underline{Z}_C); \\ \underline{Z}_{10} &= \underline{Z}_{21} = \underline{Z}_{02} = \frac{1}{3}(\underline{Z}_A + \underline{a} \underline{Z}_B + \underline{a}^2 \underline{Z}_C).\end{aligned}$$

Из полученных соотношений видно, что если к несимметричной цепи приложена несимметричная система напряжений, то каждая из симметричных составляющих токов зависит от симметричных составляющих напряжений всех последовательностей. Поэтому, если бы трехфазная цепь на всех участках была несимметрична, рассматриваемый метод расчета не давал бы преимуществ. На практике система в основном является симметричной, а несимметрия обычно носит локальный характер. Это обстоятельство, как будет показано в следующей лекции, значительно упрощает анализ.

На всех участках цепи, где сопротивления по фазам одинаковы,  $\underline{Z}_{ik} = 0$  для  $i \neq k$ . Тогда из (3.24) получаем

$$\dot{U}_1 = \underline{Z}_{11}\dot{I}_1; \quad \dot{U}_2 = \underline{Z}_{22}\dot{I}_2; \quad \dot{U}_0 = \underline{Z}_{00}\dot{I}_0.$$

### Контрольные вопросы

1. В каких случаях отсутствуют составляющие нулевой последовательности в линейных токах?
2. Для каких цепей сопротивления прямой и обратной последовательностей одинаковы, а для каких – различны?
3. Для анализа каких цепей возможно применение метода симметричных составляющих?
4. Как при использовании метода симметричных составляющих учитывается сопротивление в нейтральном проводе?
5. В чем заключается упрощение расчета цепи при использовании метода симметричных составляющих?

### 3.8 Теорема об активном двухполюснике для симметричных составляющих

В тех случаях, когда трехфазная цепь в целом симметрична, а несимметрия носит локальный характер (местное короткое замыкание или обрыв фазы, подключение несимметричной нагрузки), для расчета удобно применять теорему об активном двухполюснике.

При мысленном устранении несимметрии (несимметричного участка) для оставшейся цепи имеет место симметричный режим холостого хода. В соответствии с методом эквивалентного генератора теперь необходимо определить эквивалентные ЭДС и входные сопротивления симметричной цепи. В общем случае – при несимметрии в системе фазных напряжений источника – помимо эквивалентной ЭДС прямой последовательности  $\dot{E}_1$  будут также иметь место эквивалентные ЭДС обратной  $\dot{E}_2$  и нулевой  $\dot{E}_0$  последовательностей. Однако обычно напряжения генераторов симметричны – тогда  $\dot{E}_2 = \dot{E}_0$ . Величина  $\dot{E}_1$ , соответствующая напряжению холостого хода  $\dot{U}_{\text{фхх}}$  на зажимах подключения локальной несимметрии, определяется при отключении локальной несимметричной нагрузки любым известным методом расчета линейных цепей, причем в силу симметрии цепи расчет проводится для одной фазы.

В отдельности рассчитываются входные сопротивления симметричной цепи для различных последовательностей, которая предварительно преобразуется известными методами в пассивную цепь. При этом при расчете входного сопротивления нулевой последовательности  $Z_0$  необходимо учитывать только те участки цепи, которые соединены с нейтральным проводом или заземленной нейтральной точкой, т.е. принимать во внимание только те ветви, по которым могут протекать токи нулевой последовательности. Схемы для расчета входных сопротивлений прямой и обратной последовательностей одинаковы, однако в случае вращающихся машин величины этих сопротивлений различны.

Поскольку в отдельности для каждой симметричной последовательности имеет место симметричный режим, расчет указанным методом ведется на одну фазу с использованием расчетных схем для прямой (рисунке 152,а), обратной (рисунке 152,б) и нулевой (рисунке 152,в) последовательностей.

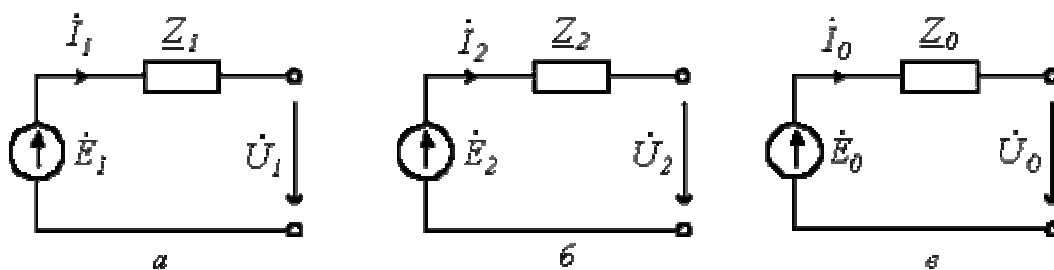


Рисунок 152 – Схемы замещения для расчета прямой, обратной и нулевой последовательности

Данным схемам соответствуют соотношения

$$\dot{E}_1 = \dot{I}_1 \underline{Z}_1 + \dot{U}_1; \quad (3.25)$$

$$\dot{E}_2 = \dot{I}_2 \underline{Z}_2 + \dot{U}_2; \quad (3.26)$$

$$\dot{E}_0 = \dot{I}_0 \underline{Z}_0 + \dot{U}_0. \quad (3.27)$$

Поскольку соотношений три, а число входящих в них неизвестных шесть  $(\dot{U}_1, \dot{U}_2, \dot{U}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_0)$ , необходимо составление трех дополнительных уравнений, учитывающих конкретный вид несимметрии.

Рассмотрим некоторые типовые примеры применения метода.

Однополюсное короткое замыкание на землю (рисунок 153).

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{кз}.$$

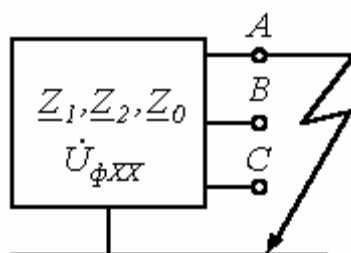


Рисунок 153 - Однополюсное короткое замыкание на землю

Поскольку фаза А замкнута на землю, то дополнительные уравнения имеют вид

$$\dot{U}_A = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0 = 0; \quad (3.28)$$

$$\dot{I}_B = 0;$$

$$\dot{I}_C = 0.$$

Тогда

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \underline{a}\dot{I}_B + \underline{a}^2\dot{I}_C) = \frac{1}{3}\dot{I}_{\kappa};$$

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \underline{a}^2\dot{I}_B + \underline{a}\dot{I}_C) = \frac{1}{3}\dot{I}_{\kappa};$$

$$\dot{I}_0 = \frac{1}{3}(\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C) = \frac{1}{3}\dot{I}_{\kappa}.$$

С учетом последних соотношений уравнения (3.25)...(3.27) можно записать в виде

$$\dot{E}_1 = \frac{\dot{I}_{\kappa}}{3} \underline{Z}_1 + \dot{U}_1; \quad (3.29)$$

$$\dot{E}_2 = \frac{\dot{I}_{\kappa}}{3} \underline{Z}_2 + \dot{U}_2; \quad (3.30)$$

$$\dot{E}_0 = \frac{\dot{I}_{\kappa}}{3} \underline{Z}_0 + \dot{U}_0. \quad (3.31)$$

Принимая во внимание (3.28), а также то, что источник питания симметричный ( $\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0$ ), просуммируем (3.29), (3.30) и (3.31):

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{\Phi\chi\chi} = 0 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0) \frac{\dot{I}_{\kappa}}{3},$$

откуда получаем

$$\dot{I}_{\kappa 3} = \frac{3\dot{U}_{\phi XX}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_0}.$$

Двухполюсное короткое замыкание без земли (рисунок 154).

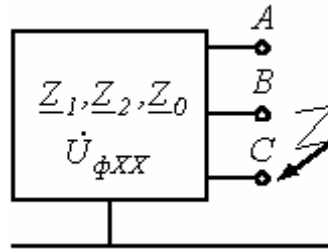


Рисунок 154 - Двухполюсное короткое замыкание без земли

Для рассматриваемого случая можно записать

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= 0; \\ \dot{I}_B &= -\dot{I}_C = \dot{I}_{\kappa 3}; \\ \dot{U}_B &= \dot{U}_C; \\ \dot{I}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Последнее равенство объясняется отсутствием пути для протекания токов нулевой последовательности.

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \frac{\dot{I}_A + \underline{a}\dot{I}_B + \underline{a}^2\dot{I}_C}{3} = \frac{(\underline{a} - \underline{a}^2)\dot{I}_{\kappa 3}}{3} = j\frac{\dot{I}_{\kappa 3}}{\sqrt{3}}; \\ \dot{I}_2 &= \frac{\dot{I}_A + \underline{a}^2\dot{I}_B + \underline{a}\dot{I}_C}{3} = \frac{(\underline{a}^2 - \underline{a})\dot{I}_{\kappa 3}}{3} = -j\frac{\dot{I}_{\kappa 3}}{\sqrt{3}}; \\ \dot{U}_1 &= \frac{\dot{U}_A + \underline{a}\dot{U}_B + \underline{a}^2\dot{U}_C}{3} = \frac{\dot{U}_A + (\underline{a} + \underline{a}^2)\dot{U}_B}{3} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_B}{3}; \\ \dot{U}_2 &= \frac{\dot{U}_A + \underline{a}^2\dot{U}_B + \underline{a}\dot{U}_C}{3} = \frac{\dot{U}_A + (\underline{a}^2 + \underline{a})\dot{U}_B}{3} = \frac{\dot{U}_A - \dot{U}_B}{3}.\end{aligned}$$

Из двух последних соотношений вытекает, что  $\dot{U}_1 = \dot{U}_2$ . При этом  $\dot{U}_0 = 0$ , так как  $\dot{E}_0 = 0$  и  $\dot{I}_0 = 0$ .

Подставив полученные выражения для напряжений и токов прямой и обратной последовательностей в (3.25) и (3.26), запишем

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_1 + \frac{j\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}} \underline{Z}_1; \quad (3.32)$$

$$\dot{E}_2 = \dot{U}_2 - \frac{j\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}} \underline{Z}_2. \quad (3.33)$$

Вычитая из (3.32) соотношение (3.33) и учитывая, что в силу симметрии источника  $\dot{E}_2 = 0$ , получим

$$\dot{E}_1 = \dot{U}_{\phi XX} = 0 + (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \frac{j\dot{I}_{кз}}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$\dot{I}_{кз} = -j \frac{\sqrt{3}\dot{U}_{\phi XX}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Обрыв линейного провода (рисунок 155) – определить напряжение в месте разрыва.

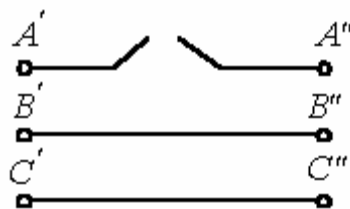


Рисунок 155 - Обрыв линейного провода

В рассматриваемом случае дополнительные уравнения имеют вид

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0 = 0, \quad (3.34)$$

$$\dot{U}_{B'B^*} = 0; \quad (3.35)$$

$$\dot{U}_{C'C^*} = 0. \quad (3.36)$$

Из соотношений (3.35) и (3.36) вытекает равенство:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_0. \quad (3.37)$$

На основании (3.25)...(3.27) с учетом (3.37) запишем

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_1}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_2}; \quad \dot{I}_0 = \frac{\dot{E}_0 - \dot{U}_1}{\underline{Z}_0}.$$

Принимая во внимание симметричность источника ( $\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0$ ), подставим последние выражения в (3.34):

$$\frac{\dot{E}_1}{\underline{Z}_1} - \dot{U}_1 \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_0} \right) = 0,$$

- откуда

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_{\phi XX} / \underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_0}.$$

Таким образом, искомое напряжение

$$\dot{U}_{A'A^*} = 3 \frac{\dot{U}_{\phi XX} / \underline{Z}_1}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2 + 1/\underline{Z}_0}.$$

Подключение несимметричной нагрузки ( $\underline{Z}_A \neq \underline{Z}_B \neq \underline{Z}_C$ ) к симметричной цепи (рисунок 156).



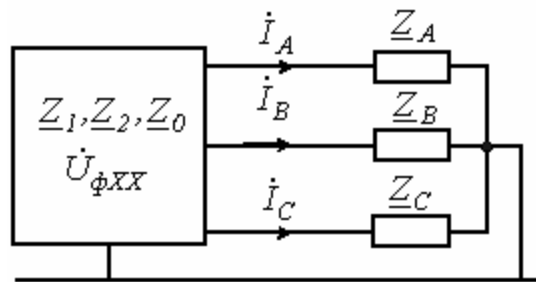


Рисунок 156 - Подключение несимметричной нагрузки  
к симметричной цепи

Учитывая, что  $\dot{E}_2 = \dot{E}_0 = 0$ , подставим в уравнения (3.25)...(3.27) определенные в предыдущей лекции выражения  $\dot{U}_1, \dot{U}_2$  и  $\dot{U}_0$  (см. соотношение (3.24)):

$$\begin{aligned}\dot{E}_1 = \dot{U}_{\phi XX} &= \dot{I}_1(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_{11}) + \dot{I}_2 \underline{Z}_{12} + \dot{I}_0 \underline{Z}_{10}; \\ 0 &= \dot{I}_1 \underline{Z}_{21} + \dot{I}_2(\underline{Z}_2 + \underline{Z}_{22}) + \dot{I}_0 \underline{Z}_{20}; \\ 0 &= \dot{I}_1 \underline{Z}_{01} + \dot{I}_2 \underline{Z}_{02} + \dot{I}_0(\underline{Z}_0 + \underline{Z}_{00}).\end{aligned}$$

Решая данную систему уравнений, находим  $\dot{I}_1, \dot{I}_2$  и  $\dot{I}_0$ . Тогда

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_B &= \underline{a}^2 \dot{I}_1 + \underline{a} \dot{I}_2 + \dot{I}_0; \\ \dot{I}_C &= \underline{a} \dot{I}_1 + \underline{a}^2 \dot{I}_2 + \dot{I}_0\end{aligned}$$

и

$$\dot{U}_A = \dot{I}_A \underline{Z}_A; \quad \dot{U}_B = \dot{I}_B \underline{Z}_B; \quad \dot{U}_C = \dot{I}_C \underline{Z}_C.$$

В рассмотренных примерах предполагалось, что необходимые для анализа цепи параметры  $\dot{U}_{\phi XX}, \underline{Z}_1, \underline{Z}_2$  и  $\underline{Z}_0$  предварительно определены.

Рассмотрим их расчет на примере предыдущей задачи для некоторой схемы на рисунке 157.

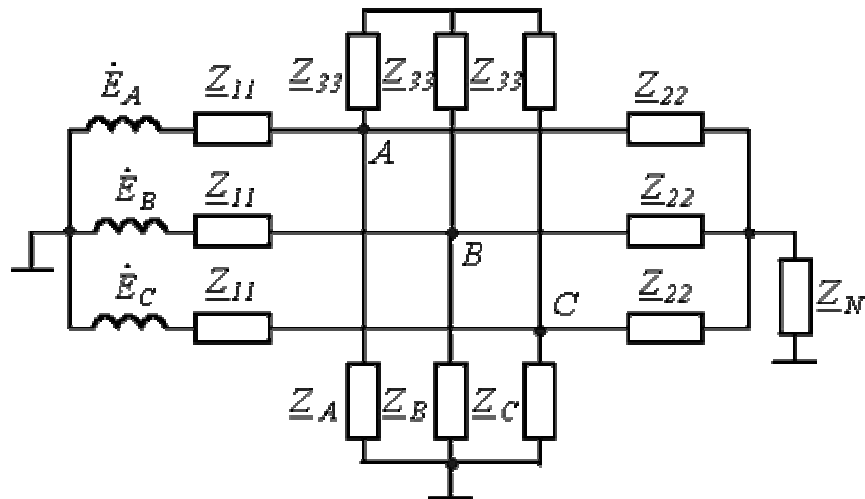


Рисунок 157 – К расчету несимметричного режима

Поскольку при отключении несимметричной нагрузки  $Z_A, Z_B, Z_C$  оставшаяся часть схемы будет работать в симметричном режиме, для определения  $\dot{U}_{\phi\phi\phi}$  получаем расчетную однофазную схему на рисунок 158.

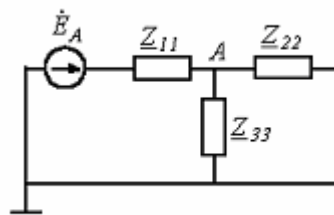


Рисунок 158 – Расчетная однофазная схема

Из нее

$$\dot{U}_{\phi\lambda\lambda} = \dot{\phi}_A = \frac{\dot{E}_A / Z_{11}}{1/Z_{11} + 1/Z_{22} + 1/Z_{33}}.$$

Схема для определения входных сопротивлений прямой  $\underline{Z}_1$  и обратной  $\underline{Z}_2$  последовательностей одна и та же и соответствует цепи на рисунке 159,а. В соответствии с ней

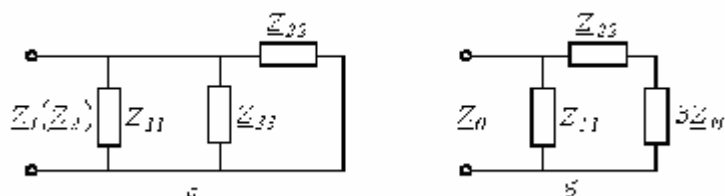


Рисунок 159 - Схема для определения входных сопротивлений прямой и обратной последовательностей

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22}\underline{Z}_{33}}{\underline{Z}_{11}\underline{Z}_{22} + \underline{Z}_{11}\underline{Z}_{33} + \underline{Z}_{22}\underline{Z}_{33}}.$$

Схема для определения  $\underline{Z}_0$ , полученная с учетом возможных путей протекания токов нулевой последовательности, приведена на рисунок 159,б.

Из нее

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_{11}(\underline{Z}_{22} + 3\underline{Z}_N)}{\underline{Z}_{11} + \underline{Z}_{22} + 3\underline{Z}_N}.$$

### Выражение мощности через симметричные составляющие

Комплекс полной мощности в трехфазной цепи

$$S = P + jQ = \dot{U}_A^* \dot{I}_A + \dot{U}_B^* \dot{I}_B + \dot{U}_C^* \dot{I}_C. \quad (3.38)$$

Для фазных напряжений имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_B &= \underline{a}^2 \dot{U}_1 + \underline{a} \dot{U}_2 + \dot{U}_0; \\ \dot{U}_C &= \underline{a} \dot{U}_1 + \underline{a}^2 \dot{U}_2 + \dot{U}_0. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Учитывая, что комплекс, сопряженный  $\underline{a}$ , равен  $\underline{a}^2$  и наоборот, для сопряженных комплексов токов запишем:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A^* &= \dot{I}_1^* + \dot{I}_2^* + \dot{I}_0^*; \\ \dot{I}_B^* &= \underline{a}^* \dot{I}_1^* + \underline{a}^{*2} \dot{I}_2^* + \dot{I}_0^*; \\ \dot{I}_C^* &= \underline{a}^{*2} \dot{I}_1^* + \underline{a}^* \dot{I}_2^* + \dot{I}_0^*. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Подставляя (3.39) и (3.40) в (3.38), после соответствующих преобразований получим

$$\underline{S} = 3\dot{U}_1^* \dot{I}_1 + 3\dot{U}_2^* \dot{I}_2 + 3\dot{U}_0^* \dot{I}_0.$$

Отсюда

$$P = 3U_1 I_1 \cos \varphi_1 + 3U_2 I_2 \cos \varphi_2 + 3U_0 I_0 \cos \varphi_0 = P_1 + P_2 + P_0$$

и

$$Q = 3U_1 I_1 \sin \varphi_1 + 3U_2 I_2 \sin \varphi_2 + 3U_0 I_0 \sin \varphi_0 = Q_1 + Q_2 + Q_0,$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$  - разности фаз соответствующих симметричных составляющих напряжений и токов.

### Контрольные вопросы

1. В каких случаях целесообразно применение теоремы об активном двухполюснике для симметричных составляющих?

2. Как рассчитываются эквивалентные параметры симметричной цепи, к которой подключается локальная несимметричная нагрузка?
3. В чем заключаются особенности расчета входного сопротивления нулевой последовательности?
4. Какова последовательность анализа трехфазной цепи с использованием теоремы об активном двухполюснике для симметричных составляющих?

### 3.9 Вращающееся магнитное поле

Как было показано ранее, одним из важнейших преимуществ многофазных систем является получение вращающегося магнитного поля с помощью неподвижных катушек, на чем основана работа двигателей переменного тока. Рассмотрение этого вопроса начнем с анализа магнитного поля катушки с синусоидальным током.

#### Магнитное поле катушки с синусоидальным током

При пропускании по обмотке катушки синусоидального тока она создает магнитное поле, вектор индукции которого изменяется (пульсирует) вдоль этой катушки также по синусоидальному закону. Мгновенная ориентация вектора магнитной индукции в пространстве зависит от намотки катушки и мгновенного направления тока в ней и определяется по правилу правого буравчика. Так для случая, показанного на рисунке 160, вектор магнитной индукции направлен по оси катушки вверх. Через полпериода, когда при том же модуле ток изменит свой знак на противоположный, вектор магнитной индукции при той же абсолютной величине поменяет свою ориентацию в пространстве на  $180^\circ$ . С учетом вышесказанного магнитное поле катушки с синусоидальным током называют **пульсирующим**.

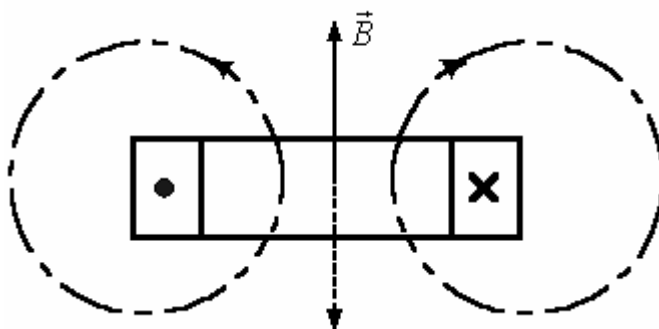


Рисунок 160 – Катушка индуктивности

## Круговое вращающееся магнитное поле двух- и трехфазной обмоток

Круговым вращающимся магнитным полем называется поле, вектор магнитной индукции которого, не изменяясь по модулю, вращается в пространстве с постоянной угловой частотой.

Для создания кругового вращающегося поля необходимо выполнение двух условий:

1. Оси катушек должны быть сдвинуты в пространстве друг относительно друга на определенный угол (для двухфазной системы – на  $90^\circ$ , для трехфазной – на  $120^\circ$ ).
2. Токи, питающие катушки, должны быть сдвинуты по фазе соответственно пространственному смещению катушек.

Рассмотрим получение кругового вращающегося магнитного поля в случае двухфазной системы Тесла (рисунок 161, а).

При пропускании через катушки гармонических токов каждая из них в соответствии с вышесказанным будет создавать пульсирующее магнитное поле. Векторы  $\vec{B}_A$  и  $\vec{B}_B$ , характеризующие эти поля, направлены вдоль осей соответствующих катушек, а их амплитуды изменяются также по гармоническому закону. Если ток в катушке В отстает от тока в катушке А на  $90^\circ$  (см. рисунок 161,б), то  $B_A = B_m \sin \omega t$ ;  $B_B = B_m \sin(\omega t - 90^\circ)$ .

Найдем проекции результирующего вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  на оси x и y декартовой системы координат, связанной с осями катушек:

$$\begin{aligned} B_x &= -B_B = -B_m \sin(\omega t - 90^\circ) = B_m \cos \omega t; \\ B_y &= B_A = B_m \sin \omega t. \end{aligned}$$

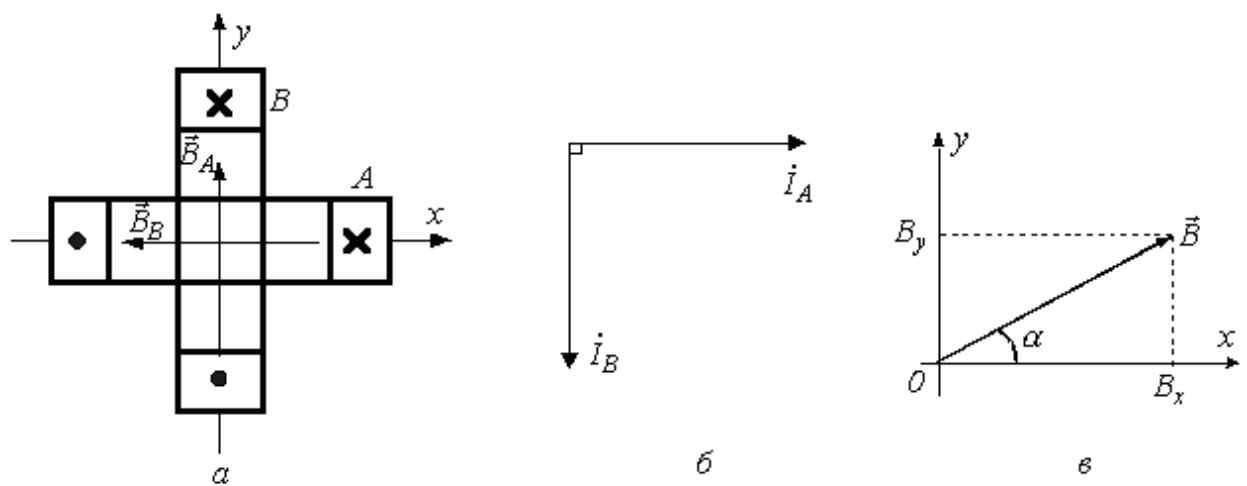


Рисунок 161 – Круговое вращающееся магнитное поле  
двухфазной системы Тесла

Модуль результирующего вектора магнитной индукции в соответствии с рисунком 161, в равен

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m = \text{const}, \quad (3.41)$$

при этом для тангенса угла  $\alpha$ , образованного этим вектором с осью абсцисс, можно записать

$$\text{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_m \sin \omega t}{B_m \cos \omega t} = \text{tg} \omega t,$$

откуда

$$\alpha = \omega t. \quad (3.42)$$

Полученные соотношения (3.41) и (3.42) показывают, что вектор результирующего магнитного поля неизменен по модулю и вращается в пространстве с постоянной угловой частотой  $\omega$ , описывая окружность, что соответствует круговому вращающемуся полю.

Покажем, что симметричная трехфазная система катушек (см. рисунок 162, а) также позволяет получить круговое вращающееся магнитное поле.

Каждая из катушек А, В и С при пропускании по ним гармонических токов создает пульсирующее магнитное поле. Векторная диаграмма в пространстве для этих полей представлена на рисунок 162,б.

Для проекций результирующего вектора магнитной индукции на

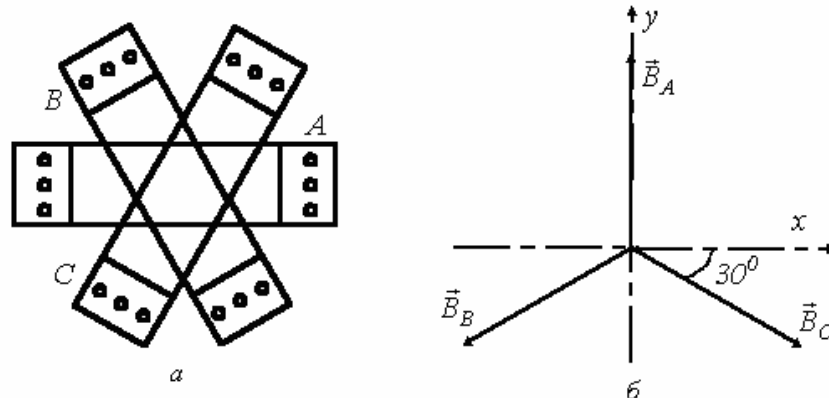


Рисунок 162 - Симметричная трехфазная система катушек и векторная диаграмма

оси декартовой системы координат, ось у у которой совмещена с магнитной осью фазы А, можно записать

$$B_x = B_C \cos 30^\circ - B_B \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(B_C - B_B); \quad (3.43)$$

$$B_y = B_A - B_B \sin 30^\circ - B_C \sin 30^\circ = B_A - \frac{1}{2}(B_B + B_C). \quad (3.44)$$

Приведенные соотношения учитывают пространственное расположение катушек, но они также питаются трехфазной системой токов с временным сдвигом по фазе на  $120^\circ$ . Поэтому для мгновенных значений индукций катушек имеют место соотношения

$$B_A = B_m \sin \omega t, \quad B_B = B_m \sin(\omega t - 120^\circ), \quad B_C = B_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$



Подставив эти выражения в (3.43) и (3.44), получим:

$$B_x = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \left[ \sin(\omega t + 120^\circ) - \sin(\omega t - 120^\circ) \right] = \frac{\sqrt{3}}{2} B_m 2 \cos \omega t \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} B_m \cos \omega t \quad (3.45)$$

$$B_y = B_m \sin \omega t - \frac{1}{2} B_m \left[ \sin(\omega t - 120^\circ) + \sin(\omega t + 120^\circ) \right] = B_m \sin \omega t - \frac{1}{2} B_m 2 \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t. \quad (3.46)$$

В соответствии с (3.45) и (3.46) и рисунком 161, в для модуля вектора магнитной индукции результирующего поля трех катушек с током можно записать:

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m = \text{const},$$

а сам вектор  $\vec{B}$  составляет с осью x угол  $\alpha$ , для которого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{1,5 B_m \sin \omega t}{1,5 B_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t,$$

откуда

$$\alpha = \omega t.$$

Таким образом, и в данном случае имеет место неизменный по модулю вектор магнитной индукции, вращающийся в пространстве с постоянной угловой частотой  $\omega$ , что соответствует круговому полю.

## Магнитное поле в электрической машине

С целью усиления и концентрации магнитного поля в электрической машине для него создается магнитная цепь. Электрическая машина состоит из двух основных частей (см. рисунок 163): неподвижного статора и вращающегося ротора, выполненных соответственно в виде полого и сплошного цилиндров.

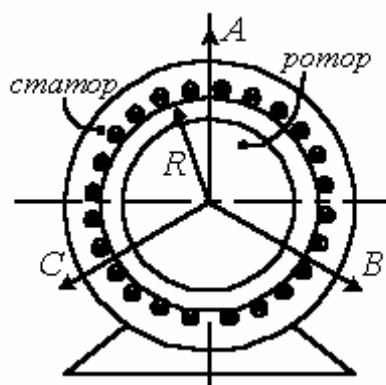


Рисунок 163 – Электрическая машина

На статоре расположены три одинаковые обмотки, магнитные оси которых сдвинуты по расточке магнитопровода на  $2/3$  полюсного деления  $\tau$ , величина которого определяется выражением

$$\tau = \frac{2\pi R}{2p} = \frac{\pi R}{p},$$

где  $R$  - радиус расточки магнитопровода, а  $p$  – число пар полюсов (число эквивалентных вращающихся постоянных магнитов, создающих магнитное поле, - в представленном на рисунке 163 случае  $p=1$ ).

На рисунке 163 сплошными линиями (А, В и С) отмечены положительные направления пульсирующих магнитных полей вдоль осей обмоток А, В и С.

Приняв магнитную проницаемость стали бесконечно большой, построим кривую распределения магнитной индукции в воздушном зазоре машины, создаваемой обмоткой фазы А, для некоторого момента времени  $t$  (рисунок 164). При построении учтем, что кривая изменяется скачком в местах расположения катушечных сторон, а на участках, лишенных тока, имеют место горизонтальные участки.

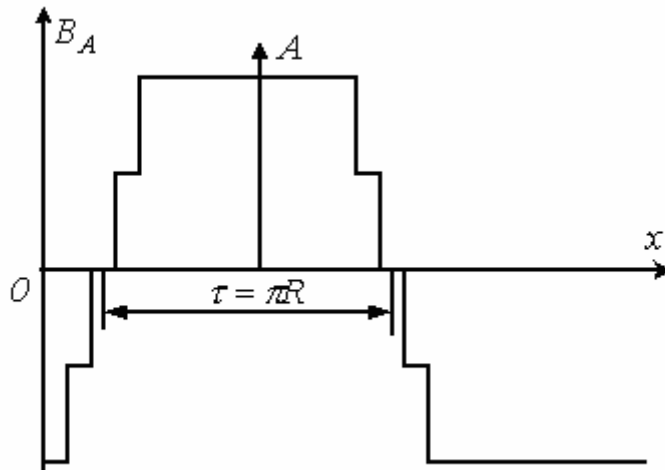


Рисунок 164 - Кривая распределения магнитной индукции в воздушном зазоре

Заменяем данную кривую синусоидой (следует указать, что у реальных машин за счет соответствующего исполнения фазных обмоток для результирующего поля такая замена связана с весьма малыми погрешностями). Приняв амплитуду этой синусоиды для выбранного момента времени  $t$  равной  $B_A$ , запишем

$$B_{Ax} = B_A \sin \frac{\pi}{\tau} x \quad (3.47)$$

и аналогично

$$B_{Bx} = B_B \sin \left( \frac{\pi}{\tau} x - \frac{2\pi}{3} \right); \quad (3.48)$$

$$B_{Cx} = B_C \sin \left( \frac{\pi}{\tau} x + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (3.49)$$

С учетом гармонически изменяющихся фазных токов для мгновенных значений этих величин при сделанном ранее допущении о линейности зависимости индукции от тока можно записать

$$B_A = B_m \sin \omega t; \quad B_B = B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right); \quad B_C = B_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Подставив последние соотношения в (3.47)...(3.49), получим

$$B_{Ax} = B_m \sin \omega t \sin \frac{\pi}{\tau} x = \frac{B_m}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \omega t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x + \omega t\right) \right]; \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} B_{Bx} &= B_m \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x - \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{B_m}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \omega t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x + \omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \right]; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} B_{Cx} &= B_m \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tau} x + \frac{2\pi}{3}\right) = \\ &= \frac{B_m}{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \omega t\right) - \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Просуммировав соотношения (3.50)...(3.52), с учетом того, что сумма последних членов в их правых частях тождественно равна нулю, получим для результирующего поля вдоль воздушного зазора машины выражение

$$B_x = B_{Ax} + B_{Bx} + B_{Cx} = \frac{3}{2} B_m \cos\left(\frac{\pi}{\tau} x - \omega t\right),$$

представляющее собой уравнение бегущей волны.

Магнитная индукция  $B_x$  постоянна, если  $\pi x/\tau - \omega t = \text{const}$ . Таким образом, если мысленно выбрать в воздушном зазоре некоторую точку и перемещать ее вдоль расточки магнитопровода со скоростью

$$v = \frac{\omega \tau}{\pi} = \frac{2\pi f \tau}{\pi} = 2f\tau,$$

то магнитная индукция для этой точки будет оставаться неизменной. Это означает, что с течением времени кривая распределения магнитной индукции, не меняя своей формы, перемещается вдоль окружности статора. Следовательно, результирующее магнитное поле вращается с постоянной скоростью. Эту скорость принято определять в оборотах в минуту:

$$n_0 = \frac{2f\tau}{2p\tau} 60 = 60 \frac{f}{p}.$$

## Принцип действия асинхронного и синхронного двигателя

Устройство асинхронного двигателя соответствует изображению на рисунке 163. Вращающееся магнитное поле, создаваемое расположенными на статоре обмотками с током, взаимодействует с токами ротора, приводя его во вращение. Наибольшее распространение в настоящее время получил асинхронный двигатель с короткозамкнутым ротором ввиду своей простоты и надежности. В пазах ротора такой машины размещены токонесущие медные или алюминиевые стержни. Концы всех стержней с обоих торцов ротора соединены медными или алюминиевыми же кольцами, которые замыкают стержни накоротко. Отсюда и произошло такое название ротора.

В короткозамкнутой обмотке ротора под действием ЭДС, вызываемой вращающимся полем статора, возникают вихревые токи. Взаимодействуя с полем, они вовлекают ротор во вращение со скоростью  $\omega$ , принципиально меньшей скорости вращения поля  $\omega_0$ . Отсюда название двигателя - асинхронный.

Величина

$$S = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}$$

называется **относительным скольжением**. Для двигателей нормального исполнения  $S=0,02...0,07$ . Неравенство скоростей магнитного поля и ротора становится очевидным, если учесть, что при  $\omega = \omega_0$  вращающееся магнитное поле не будет пересекать токопроводящих стержней ротора и, следовательно, в них не будут наводиться токи, участвующие в создании вращающегося момента.

Принципиальное отличие синхронного двигателя от асинхронного заключается в исполнении ротора. Последний у синхронного двигателя представляет собой магнит, выполненный (при относительно небольших мощностях) на базе постоянного магнита или на основе электромагнита. Поскольку разноименные полюсы магнитов притягиваются, то вращающееся магнитное поле статора, которое можно интерпретировать как вращающийся магнит, увлекает за собой магнитный ротор, причем их скорости равны. Это объясняет название двигателя – синхронный.

В заключение отметим, что в отличие от асинхронного двигателя,  $\cos \varphi$  у которого обычно не превышает 0,8...0,85, у синхронного двигателя можно добиться большего значения  $\cos \varphi$  и сделать даже так, что ток будет опережать напряжение по фазе. В этом случае, подобно конденсаторным батареям, синхронная машина используется для повышения коэффициента мощности.

### Контрольные вопросы

1. Какое поле называется пульсирующим?
2. Какое поле называется вращающимся круговым?
3. Какие условия необходимы для создания кругового вращающегося магнитного поля?
4. Какой принцип действия у асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором?
5. Какой принцип действия у синхронного двигателя?
6. На какие синхронные скорости выпускаются в нашей стране двигатели переменного тока общепромышленного исполнения?

### 3.10 Решение типовых задач

#### Задача 3.1

Для трехфазной электрической цепи (рисунок 165) рассмотрим, как определяются токи в цепи, в начале которой включен электродвигатель, а в конце — соединенная треугольником осветительная нагрузка (лампы накаливания). Расчет проведем для нормальной работы цепи и при обрыве одной из фаз нагрузки. Для последнего случая разложим токи в линии на симметричные составляющие. Известны следующие данные: напряжение сети 220/127 В, напряжение электродвигателя  $U = 380/220$  В, его мощность  $P_2 = 2,8$  кВт;  $\cos \varphi = 0,8$ , к. п. д.  $\eta = 0,75$ . Сопротивление каждого из линейных проводов  $Z_{\text{л}} = 5 + j10$  Ом; сопротивления фаз осветительной нагрузки одинаковы и равны  $R = 30$  Ом.

#### Решение

1. Выбираем схему соединения электродвигателя. Исходя из соотношения между напряжением сети и двигателя, соединяем его обмотки треугольником. Схема цепи приведена на рисунке 165.

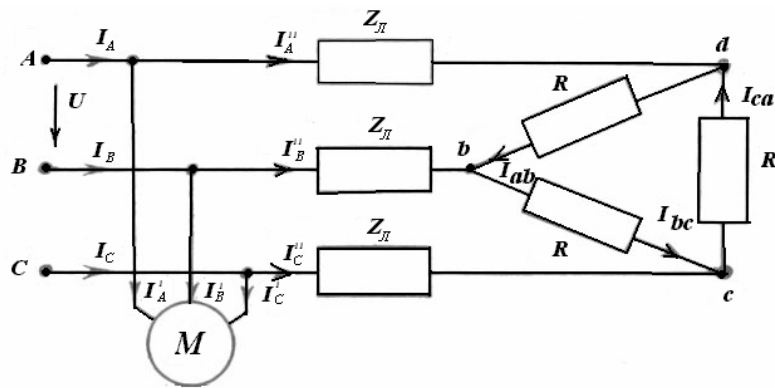


Рисунок 165 - Схема цепи

2. Преобразуем симметричный треугольник с сопротивлениями  $R$  в симметричную эквивалентную звезду с сопротивлениями  $R'$ .

$$R' = \frac{R}{3} = 10 \text{ Ом};$$

Этот эквивалентный потребитель (вместе с сопротивлением линии) окажется включенным параллельно электродвигателю. Поэтому можно изобразить эквивалентную схему для одной фазы (рисунок 166).

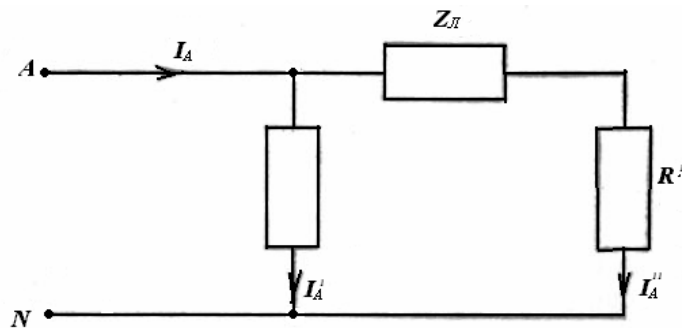


Рисунок 166 - Эквивалентная схема для одной фазы

Определим токи в ней.

а) Ток двигателя:

$$I_A' = \frac{P}{\sqrt{3}U \cos \varphi \eta} = \frac{2800}{\sqrt{3} \cdot 220 \cdot 0.8 \cdot 0.75} = 12.25 \text{ А.}$$

Этот ток будет отставать по фазе от фазного напряжения  $U_A=127 \text{ В}$  на угол  $\varphi = \arccos 0.8 = 37^\circ$ . Поэтому в комплексной форме этот ток и токи других фаз запишутся следующим образом:

$$\dot{I}'_A = 12.25e^{-j37^\circ} = 9.8 - j7.39 \text{ A};$$

$$\dot{I}'_B = \dot{I}'_A e^{-j120^\circ} = 12.25e^{-j157^\circ} = -11.3 - j4.78 \text{ A};$$

$$\dot{I}'_C = \dot{I}'_A e^{j120^\circ} = 12.25e^{j83^\circ} = 1.5 + j12.17 \text{ A}.$$

б) Линейные токи ламп:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L + R' = 15 + j10 = 18e^{j33^\circ 40'} \text{ Ом};$$

$$\dot{I}''_A = \frac{\dot{U}_A}{\underline{Z}} = \frac{127}{18e^{j33^\circ 40'}} = 7.06e^{-j33^\circ 40'} = 5.86 - j3.97 \text{ A}.$$

$$\dot{I}''_B = \dot{I}''_A e^{j120^\circ 40'} = -6.3 - j3.09 \text{ A}.$$

$$\dot{I}''_C = \dot{I}''_A e^{j120^\circ} = 7.06e^{j86^\circ 20'} = 0.44 + j7.06 \text{ A}.$$

в) Токи в линейных проводах:

$$\dot{I}_A = \dot{I}'_A + \dot{I}''_A = 15.66 - j11.36 = 19.3e^{-j36^\circ} \text{ A}.$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}'_B + \dot{I}''_B = -17.6 - j7.87 = 19.3e^{-j176^\circ} \text{ A}.$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}'_C + \dot{I}''_C = 2.94 + j19.23 = 19.3e^{j84^\circ} \text{ A}.$$

г) Фазные токи треугольника:

$$\dot{I}_{a\phi} = \frac{\dot{I}''_A}{\sqrt{3}} e^{-j30^\circ} = 4.07e^{-j3^\circ 40'} = 4.07 - j0.267 \text{ A},$$

$$\dot{I}_{\phi c} = \dot{I}_{a\phi} e^{-j120^\circ} = 4.07e^{-j123^\circ 40'} = -2.27 - j3.39 \text{ A},$$

$$\dot{I}_{\phi a} = \dot{I}_{a\phi} e^{j116^\circ 20'} = -1.8 + j3.657 \text{ A}.$$

В аварийном режиме (при обрыве фазы *ca*) цепь будет иметь вид, показанный на рисунке 167. Рассчитаем токи в ней.

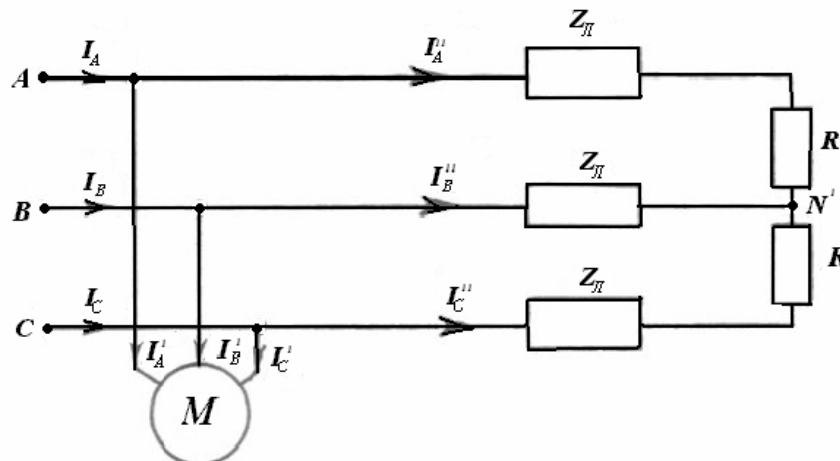


Рисунок 167 – Схема цепи в аварийном режиме



1. Токи двигателя  $\dot{I}'_A, \dot{I}'_B, \dot{I}'_C$  остались без изменения, так как не изменились напряжение и параметры двигателя.

2. Для определения токов нагрузки найдем сначала напряжения на ее зажимах. Для этого предварительно выразим в комплексной форме линейные напряжения сети и проводимости фаз. Так как при расчете симметричной цепи мы уже приняли, что фазное напряжение  $\dot{U}_A$  направлено по действительной оси, то линейное напряжение  $\dot{U}_{AB}$ , опережающее его на  $30^\circ$ , запишется следующим образом:

$$\dot{U}_{AB} = 220e^{j30^\circ} = 190 + j110 \text{ В},$$

а два других напряжения —  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$  будут равны:

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_{AB}e^{-j120^\circ} = 220e^{-j90^\circ} = -220 \text{ В}.$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_{AB}e^{j120^\circ} = 220e^{j150^\circ} = -190 + j110 \text{ В}.$$

Сопровитвления фаз:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_C = \underline{Z}_\pi + R = 35 + j10 = 36.5e^{j16^\circ} \text{ Ом};$$

$$\underline{Z}_B = \underline{Z}_1 = 5 + j10 = 11.2e^{j63^\circ 30'} \text{ Ом}.$$

Проводимости фаз:

$$\underline{Y}_A = \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{36.5e^{j16^\circ}} = 0.028e^{-j16^\circ} = 0.027 - j0.0077 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{11.2e^{j63^\circ 30'}} = 0.089e^{-j63^\circ 30'} = 0.04 - j0.08 \text{ См}.$$

Фазные напряжения приемника:

$$\begin{aligned} \dot{U}'_A &= \frac{\dot{U}_{AB}\underline{Y}_B - \dot{U}_{CA}\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \\ &= \frac{220e^{j30^\circ} \cdot 0.089e^{-j63^\circ 30'} - 220e^{j150^\circ} \cdot 0.028e^{-j16^\circ}}{0.027 - j0.0077 + 0.04 - j0.08 + 0.027 - j0.0077} = \\ &= \frac{19.6e^{j33^\circ 30'} - 6.16e^{-j134^\circ}}{0.094 - j0.0954} = \frac{16.35 - j10.81 + 4.28 - j4.44}{0.094 - j0.0954} = \\ &= \frac{20.63 - j15.25}{0.094 - j0.0954} = \frac{25.6e^{j36^\circ 30'}}{0.1339e^{-j45^\circ 20'}} = 191e^{j8^\circ 50'} = 189 + j29.4 \text{ В}; \\ \dot{U}'_B &= \dot{U}'_A - \dot{U}_{AB} = 189 + j29.4 - 190 - j110 = \\ &= -1 - j80.6 \approx -j80.6 = 80.6e^{-j90^\circ} \text{ В}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{U}'_C &= \dot{U}'_A + \dot{U}_{CA} = 189 + j29.4 - 190 + j110 = \\ &= -1 + j139.4 \approx j139.4 = 139.4e^{j90^\circ} \text{ В.}\end{aligned}$$

3. Токи нагрузки:

$$\begin{aligned}\dot{I}''_A &= \frac{\dot{U}'_A}{\underline{Z}_A} = \frac{191e^{j8^\circ 50'}}{36.5e^{j16^\circ}} = 5.24e^{-j7^\circ 10'} = 5.17 - j0.66 \text{ А.} \\ \dot{I}''_B &= \frac{\dot{U}'_B}{\underline{Z}_B} = \frac{80.6e^{-j90^\circ}}{11.2e^{j63^\circ 30'}} = 7.2e^{-j153^\circ 30'} = -6.44 - j3.22 \text{ А.} \\ \dot{I}''_C &= \frac{\dot{U}'_C}{\underline{Z}_C} = \frac{139.4e^{j90^\circ}}{36.5e^{j16^\circ}} = 3.92e^{j74^\circ} = 1.27 + j3.88 \text{ А.}\end{aligned}$$

4. Определяем токи в линии:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{I}'_A + \dot{I}''_A = 14.97 - j8.05 = 17e^{-j28^\circ 15'} \text{ А.} \\ \dot{I}_B &= \dot{I}'_B + \dot{I}''_B = -17.74 - j8 = 19.5e^{-j155^\circ 45'} \text{ А.} \\ \dot{I}_C &= \dot{I}'_C + \dot{I}''_C = 2.77 + j16.05 = 16.2e^{j80^\circ 105} \text{ А.}\end{aligned}$$

5. Разлагаем полученную несимметричную систему токов на симметричные составляющие.

а) Аналитически:

$$\begin{aligned}\dot{I}_{AO} = \dot{I}_{BO} = \dot{I}_{CO} &= \frac{\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C}{3} = \frac{14.97 - j8.05 - 17.74 - j8 + 2.77 + j16.05}{3} = 0 \\ \dot{I}_{A1} &= \frac{\dot{I}_A + a\dot{I}_B + a^2\dot{I}_C}{3} = 14.41 - j9.95 = 17.5e^{-j34^\circ 40'} \text{ А.} \\ \dot{I}_{B1} &= \dot{I}_{A1}e^{-j120^\circ} = 17.5e^{-j154^\circ 40'} \text{ А.} \\ \dot{I}_{C1} &= \dot{I}_{A1}e^{j120^\circ} = 17.5e^{j85^\circ 20'} \text{ А.} \\ \dot{I}_{A2} &= \frac{\dot{I}_A + a^2\dot{I}_B + a\dot{I}_C}{3} = 0.573 + j5.683 = 5.683e^{j84^\circ 15'} \text{ А.} \\ \dot{I}_{B2} &= \dot{I}_{A2}e^{j120^\circ} = 5.683e^{j204^\circ 15'} \text{ А.} \\ \dot{I}_{C2} &= \dot{I}_{A2}e^{-j120^\circ} = 5.683e^{-j35^\circ 45'} \text{ А.}\end{aligned}$$

б) Графически:

На комплексной плоскости чертим векторы  $\dot{I}'_A, \dot{I}'_B, \dot{I}'_C$

(рисунок 168, а), а также векторы  $a\dot{I}_B, a^2\dot{I}_B, a\dot{I}_C, a^2\dot{I}_C$ , представляющие собой соответствующие векторы, повернутые на  $120^\circ$  в сторону опережения (умножение на  $a$ ) или отставания (умножение на  $a^2$ ). Складывая геометрически векторы  $\dot{I}'_A, \dot{I}'_B, \dot{I}'_C$  и взяв  $1/3$  полученной суммы, найдем

составляющие нулевой последовательности  $\dot{I}_{AO}, \dot{I}_{BO}, \dot{I}_{CO}$  в данном случае равны нулю (рисунок 168,б).

Проделав те же операции над векторами  $\dot{I}_A, a\dot{I}_B, a^2\dot{I}_C$  найдем составляющие прямой последовательности  $\dot{I}_{A1}, \dot{I}_{B1}, \dot{I}_{C1}$  (рисунок 168,в). В результате аналогичных действий с векторами  $\dot{I}_A, a^2\dot{I}_B, a\dot{I}_C$  получим составляющие обратной последовательности  $\dot{I}_{A2}, \dot{I}_{B2}, \dot{I}_{C2}$  (рисунок 168, г).

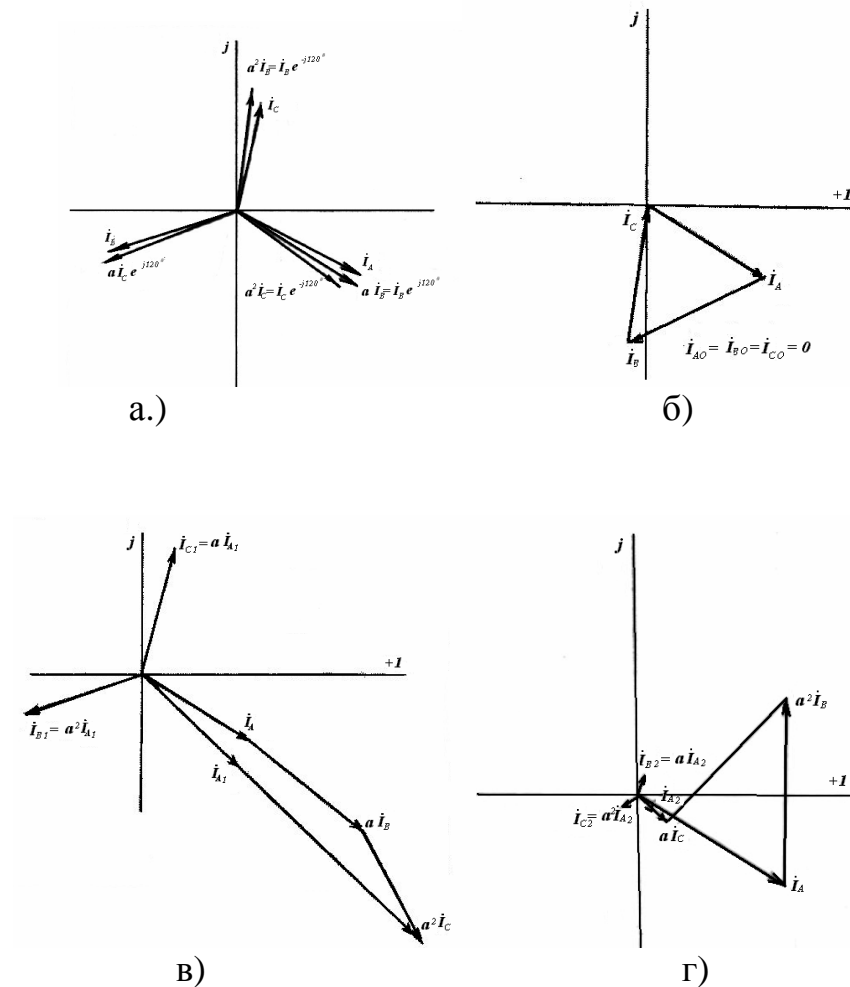


Рисунок 168 – Векторные диаграммы прямой, обратной, нулевой последовательности

### Задача 3.2

При соединении звездой с нулевым проводом определить фазные напряжения и токи в приемнике энергии, сопротивления которого заданы комплексами:

$$\underline{Z}_A = 8 + j4 \text{ Ом}; \underline{Z}_B = 8 - j4 \text{ Ом}; \underline{Z}_C = 5 \text{ Ом}.$$

Действующая величина симметричной трехфазной системы ЭДС 220 В.  
Сопrotивление нулевого провода  $\underline{Z}_N = 0,5 + j1 \text{ Ом}$ .

Построить векторную диаграмму. Сопrotивлениями линейных проводов и внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебречь.

### Решение

Схема, соответствующая условию задачи, показана на рисунке 169.

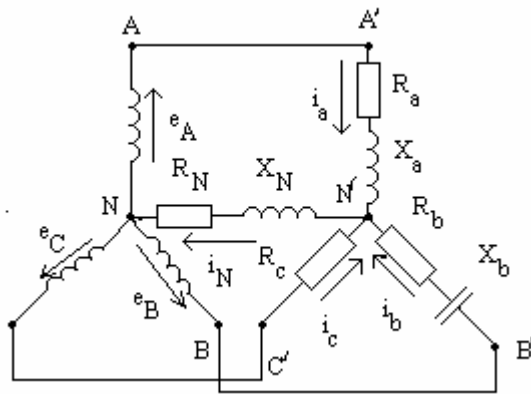


Рисунок 169 – Расчетная схема

Проводимости ветвей между узловыми точками  $NN'$ :

$$\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \frac{1}{8 + j4} = 0,1 - j0,05 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_B} = \frac{1}{8 - j4} = 0,1 + j0,05 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ См};$$

$$\underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N} = \frac{1}{0,5 + j1} = 0,4 - j0,8 \text{ См}.$$

Комплексы ЭДС источника:

$$\dot{E}_A = 220 \text{ В};$$

$$\dot{E}_B = 220 \cdot e^{-j120^\circ} = -110 - j190 \text{ В};$$

$$\dot{E}_C = 220 \cdot e^{-j240^\circ} = -110 + j190 \text{ В};$$

Узловое напряжение:

$$\begin{aligned}\dot{U}_N &= \frac{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \dot{E}_B \underline{Y}_B + \dot{E}_C \underline{Y}_C}{\dot{E}_A \underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N} = \\ &= \frac{220 \cdot (0,1 - j0,05) + (-110 - j190)(0,1 + j0,05) + (-110 + j190) \cdot 0,2}{0,1 - j0,05 + 0,1 + j0,05 + 0,2 + 0,4 - j0,8} = \\ &= -2,5 + j0,625\end{aligned}$$

Фазные напряжения приемника:

$$\begin{aligned}\dot{U}'_A &= E'_A - \dot{U}_N = 220 + 2,5 - j0,625 = 222,5 - j0,625 \text{ В}; \\ \dot{U}'_B &= E'_B - \dot{U}_N = -110 - j190 + 2,5 - j0,625 = -107,5 - j190,625 \text{ В}; \\ \dot{U}'_C &= E'_C - \dot{U}_N = -110 + j190 + 2,5 - j0,625 = -107,5 + j189,375 \text{ В}.\end{aligned}$$

Токи в фазах и нулевом проводе:

$$\begin{aligned}\dot{I}_A &= \dot{U}'_A \underline{Y}_A = (222,5 - j0,625)(0,1 - j0,05) = 22,22 - j11,19 \text{ А}; \\ \dot{I}_B &= \dot{U}'_B \underline{Y}_B = (107,5 - j190,625)(0,1 + j0,05) = -1,22 - j24,44 \text{ А}; \\ \dot{I}_C &= \dot{U}'_C \underline{Y}_C = (-107,5 + j189,375)0,2 = -21,5 + j37,88 \text{ А}; \\ \dot{I}_N &= \dot{U}'_N \underline{Y}_N = (-2,5 + j0,625)(0,4 - j0,8) = -0,5 - j2,25 \text{ А}.\end{aligned}$$

Векторная диаграмма напряжений и токов показана на рисунке 170.

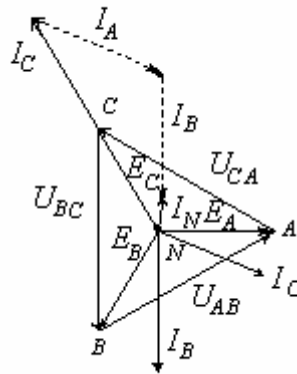


Рисунок 170 – Векторная диаграмма

### Задача 3.3

Сопровителения фаз приемника  $\underline{Z}_{AB} = 8 + j4$  Ом,  $\underline{Z}_{BC} = 8 - j4$  Ом,  $\underline{Z}_{CA} = 5$  Ом подключены треугольником к трехфазному генератору, обмотки которого также соединены треугольником. Действующая величина симметричной трехфазной системы ЭДС 220 В. Сопровителениями линейных проводов и внутренними сопровителениями источника ЭДС пренебречь. Определить

фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности каждой фазы и всей цепи. Построить векторную диаграмму.

### Решение

Схема, соответствующая условию задачи, показана на рисунке 171.

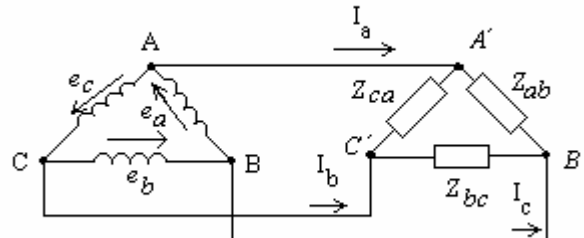


Рисунок 171 - Расчетная схема

Если сопротивления линейных проводов и обмоток генератора считать равными нулю, то фазные напряжения приемника равны соответствующим ЭДС:

$$\dot{U}_{AB} = j220; \dot{U}_{BC} = 220 \cdot e^{-j30^\circ} = 190 - j110; \dot{U}_{CA} = 220 \cdot e^{-j150^\circ} = -190 - j110.$$

Фазные токи в приемнике:

$$\begin{aligned} \dot{I}_{AB} &= \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_{AB}} = \frac{j220}{8 + j4} = 11 + j22; \\ \dot{I}_{BC} &= \frac{\dot{U}_{BC}}{\underline{Z}_{BC}} = \frac{190 - j110}{8 - j4} = 24,5 - j1,5; \\ \dot{I}_{CA} &= \frac{\dot{U}_{CA}}{\underline{Z}_{CA}} = \frac{-190 - j110}{5} = -38 - j22. \end{aligned}$$

Линейные токи:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{AB} - \dot{I}_{CA} = 11 + j22 + 38 + j22 = 49 + j44; \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{BC} - \dot{I}_{AB} = 24,5 - j1,5 - 11 - j22 = 13,5 - j23,5; \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{CA} - \dot{I}_{BC} = -38 - j22 - 24,5 + j1,5 = -62,5 - j20,5. \end{aligned}$$

Сумма линейных токов:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 49 + j44 + 13,5 - j23,5 - 62,5 - j20,5 = 0.$$

Равенство нулю суммы линейных токов является общим свойством трехфазных трехпроводных цепей при соединении звездой и треугольником при симметричной и несимметричной нагрузках.

Мощности фаз:

$$\begin{aligned}\underline{S}_{AB} &= \dot{U}_{AB} \dot{I}_{AB} = j220(11 - j22) = 4840 + j2420; \\ \underline{S}_{BC} &= \dot{U}_{BC} \dot{I}_{BC} = (190 - j110)(24,5 + j1,5) = 4840 - j2420; \\ \underline{S}_{CA} &= \dot{U}_{CA} \dot{I}_{CA} = (-190 - j110)(-38 + j22) = 12060.\end{aligned}$$

Полная мощность системы активная:

$$P = 4840 + 4840 + 12060 = 21740 \text{ Вт.}$$

Полная мощность системы реактивная:

$$Q = 2420 - 2420 = 0 \text{ ВАр.}$$

Векторная диаграмма построена на рисунке 172.

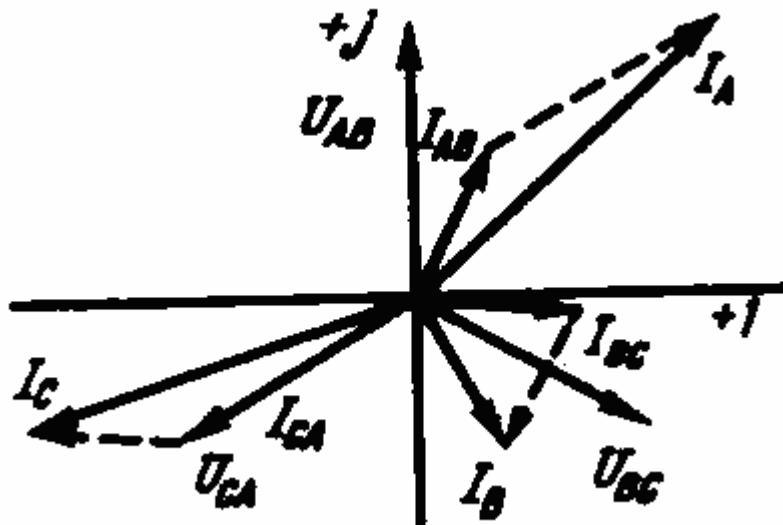


Рисунок 172 – Векторная диаграмма

### Задача 3.4

Приемник электрической энергии, соединенный треугольником включен в сеть с линейным напряжением 120 В. Сопротивления фаз приемника  $R_{AB} = 5 \text{ Ом}$ ,  $R_{BC} = 6 \text{ Ом}$ ,  $X_{BC} = 8 \text{ Ом}$  (инд.),  $X_{CA} = 10 \text{ Ом}$  (емк.). Начертить

схему по условию задачи. Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности каждой фазы и всей цепи. Построить векторную диаграмму.

### Решение

Схема, соответствующая условию задачи, показана на рисунке 173.

Решим задачу без применения комплексных чисел.

Токи в фазах:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} = \frac{120}{5} = 24 \text{ A};$$

$$I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z_{BC}} = \frac{120}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 12 \text{ A};$$

$$I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z_{CA}} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}.$$

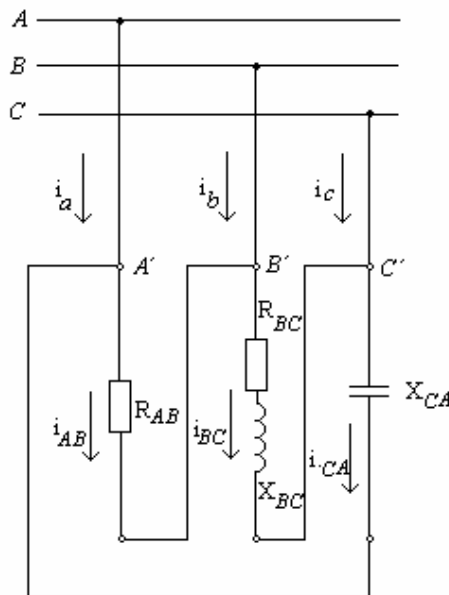


Рисунок 173 – Расчетная схема

Линейные токи определим графически с помощью векторной диаграммы. для этого найдем активные и реактивные составляющие фазных токов.

В фазе АВ включено активное сопротивление, поэтому:

$$I_{aAB} = 24 \text{ A}; I_{pAB} = 0.$$

В фазе ВС последовательно соединены активное сопротивление и катушка индуктивности, поэтому:



$$I_{aBC} = I_{BC} \cos \varphi_{BC} = 12 \frac{6}{10} = 7,2 \text{ A}; I_{pBC} = I_{BC} \sin \varphi_{BC} = 12 \frac{8}{10} = 9,6 \text{ A}.$$

В фазе СА включено емкостное сопротивление, поэтому:

$$I_{aCA} = 0 ; I_{pCA} = 12 \text{ A}.$$

Векторная диаграмма цепи показана на рисунке 174. для определения линейных токов постройте векторную диаграмму на листе миллиметровой бумаги в масштабах:  $m_i=6 \text{ A/см}$  ,  $m_u=40 \text{ В/см}$ .

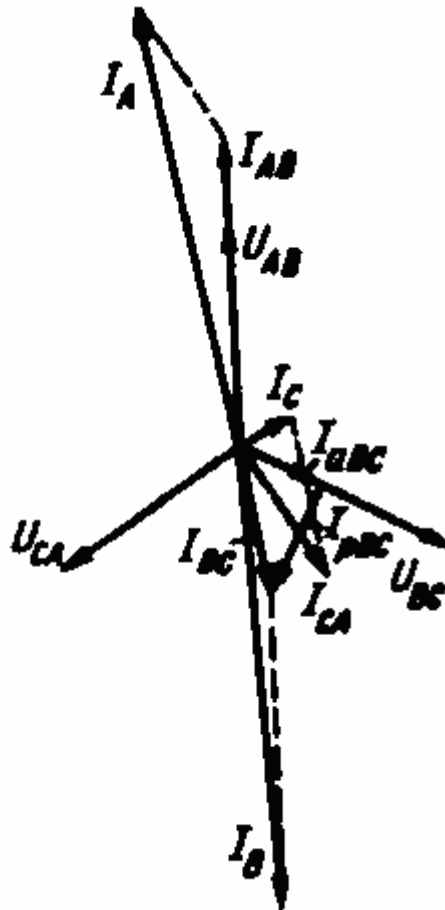


Рисунок 174 – Векторная диаграмма

Линейные токи:  $I_A = 34,5 \text{ A}$ ;  $I_B = 35,4 \text{ A}$ ;  $I_C = 5,7 \text{ A}$ .

Мощности фаз:

активные:

$$P_{AB} = U_{AB} I_{aAB} = 120 \cdot 24 = 2880 \text{ Вт};$$

$$P_{BC} = U_{BC} I_{aBC} = 120 \cdot 7,2 = 864 \text{ Вт};$$

$$P_{CA} = U_{CA} I_{aCA} = 120 \cdot 0 = 0.$$

реактивные:

$$Q_{AB} = U_{AB} I_{pAB} = 120 \cdot 0 = 0;$$

$$Q_{BC} = U_{BC} I_{pBC} = 120 \cdot 9,6 = 1152 \text{ ВАр};$$

$$Q_{CA} = U_{CA} I_{pCA} = 120 \cdot 12 = 1440 \text{ ВАр}.$$

полные:

$$S_{AB} = U_{AB} I_{AB} = P_{AB} = 2880 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$S_{BC} = U_{BC} I_{BC} = 120 \cdot 12 = 1440 \text{ В} \cdot \text{А};$$

$$S_{CA} = U_{CA} I_{CA} = Q_{CA} = 1440 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Полная мощность системы активная:

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{CA} = 2880 + 864 + 0 = 3744 \text{ Вт}.$$

Полная мощность системы реактивная:

$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0 + 1152 - 1440 = -288 \text{ ВАр}.$$

Знак минус указывает на емкостный характер реактивной мощности цепи.

### Задача 3.5

В результате неправильной маркировки концов обмоток трехфазного трансформатора (начало фазы А вторичной обмотки помечено как конец) система линейных напряжений несимметрична. Определить симметричные составляющие линейных напряжений при соединении звездой, если фазные напряжения во вторичной обмотке 220 В.

**Решение**

Запишем комплексы фазных напряжений во вторичной обмотке:

$$\dot{U}_a = 220e^{-j90^\circ} = -j220;$$

$$\dot{U}_b = 220e^{-j30^\circ} = 190 - j110;$$

$$\dot{U}_c = 220e^{-j150^\circ} = -190 - j110.$$

Вектор напряжения  $\dot{U}_a$  в соответствии с условием задачи повернут на  $180^\circ$ . Комплексные линейных напряжений:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = -j220 - 190 + j110 = -190 - j110;$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = 190 - j110 + 190 + j110 = 380;$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = -190 - j110 + j220 = -190 + j110.$$

Составляющие:

нулевой последовательности

$$\dot{U}_{0AB} = \dot{U}_{0BC} = \dot{U}_{0CA} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA}}{3} = \frac{-190 - j110 + 380 - 190 + j110}{3} = 0$$

прямой последовательности

$$\dot{U}_{1AB} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}a + \dot{U}_{CA}a^2}{3} = \frac{-190 - j110 + 380e^{j120^\circ} + (-190 + j110)e^{j240^\circ}}{3} = \frac{-190 + j330}{3}$$

$$\dot{U}_{1BC} = \dot{U}_{1AB}a^2 = \frac{380}{3};$$

$$\dot{U}_{1CA} = \dot{U}_{1AB}a = \frac{-190 - j330}{3}.$$

обратной последовательности

$$\dot{U}_{2AB} = \frac{\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC}a^2 + \dot{U}_{CA}a}{3} = \frac{-190 - j110 + 380e^{j240^\circ} + (-190 + j110)e^{j120^\circ}}{3} = \frac{-380 - j660}{3}$$

$$\dot{U}_{2BC} = \dot{U}_{2AB}a = \frac{760}{3};$$

$$\dot{U}_{2CA} = \dot{U}_{2AB}a^2 = \frac{-380 + j660}{3}.$$

На рисунке 175 показаны векторы систем прямой и обратной последовательности и их сумма- система трех исходных векторов линейных напряжений.

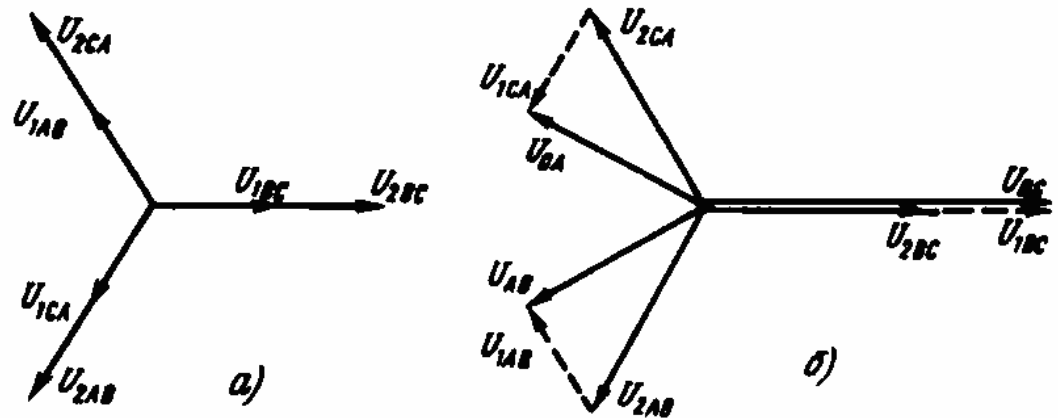


Рисунок 175 - Векторы систем прямой и обратной последовательности и их сумма

### 3.11 Применение пакета Mathcad к расчету трехфазных электрических цепей переменного тока

#### Пример расчета задачи 3.2 .

При соединении звездой с нулевым проводом определить фазные напряжения и токи в приемнике энергии, сопротивления которого заданы комплексами:

$$\underline{Z}_A = 8 + j4 \text{ Ом}; \underline{Z}_B = 8 - j4 \text{ Ом}; \underline{Z}_C = 5 \text{ Ом}.$$

Действующая величина симметричной трехфазной системы ЭДС 220 В. Сопротивление нулевого провода  $\underline{Z}_N = 0,5 + j1 \text{ Ом}$ .

Сопротивлениями линейных проводов и внутренним сопротивлениями источника ЭДС пренебречь.

#### Решение.

Схема, соответствующая условию задачи, показана на рисунке 169.

Задаем исходные данные:

$$Z_a := 8 + i \cdot 4 \quad Z_b := 8 - i \cdot 4 \quad Z_c := 5 \quad Z_n := 0.5 + i \cdot 1 \quad E := 220$$

Проводимости ветвей между узловыми точками  $NN'$ :

$$Y_a := \frac{1}{Z_a} \quad Y_b := \frac{1}{Z_b} \quad Y_c := \frac{1}{Z_c} \quad Y_n := \frac{1}{Z_n}$$

$$\begin{array}{llll}
Y_a = 0.1 - 0.05i & Y_b = 0.1 + 0.05i & Y_c = 0.2 & Y_n = 0.4 - 0.8i \\
|Y_a| = 0.112 & |Y_b| = 0.112 & |Y_c| = 0.2 & |Y_n| = 0.894 \\
\arg(Y_a) = -26.565 \text{ deg} & \arg(Y_b) = 26.565 \text{ deg} & \arg(Y_c) = 0 \text{ deg} & \arg(Y_n) = -63.435 \text{ deg}
\end{array}$$

Комплексы ЭДС источника:

$$\begin{array}{lll}
E_a := E & E_b := E \cdot e^{-i \cdot 120 \cdot \text{deg}} & E_c := E \cdot e^{-i \cdot 240 \cdot \text{deg}} \\
E_a = 220 & E_b = -110 - 190.526i & E_c = -110 + 190.526i
\end{array}$$

Узловое напряжение:

$$\begin{aligned}
U_n &:= \frac{E_a \cdot Y_a + E_b \cdot Y_b + E_c \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_n} \\
U_n &= -2.516 + 0.674i \\
|U_n| &= 2.605 \\
\arg(U_n) &= 165 \text{ deg}
\end{aligned}$$

Фазные напряжения приемника:

$$\begin{array}{lll}
U_a := E_a - U_n & U_b := E_b - U_n & U_c := E_c - U_n \\
U_a = 222.516 - 0.674i & U_b = -107.484 - 191.2i & U_c = -107.484 + 189.851i \\
|U_a| = 222.517 & |U_b| = 219.34 & |U_c| = 218.166 \\
\arg(U_a) = -0.174 \text{ deg} & \arg(U_b) = -119.343 \text{ deg} & \arg(U_c) = 119.516 \text{ deg}
\end{array}$$

Токи в фазах и нулевом проводе:

$$\begin{array}{lll}
I_a := U_a \cdot Y_a & I_b := U_b \cdot Y_b & I_c := U_c \cdot Y_c \\
I_a = 22.218 - 11.193i & I_b = -1.188 - 24.494i & I_c = -21.497 + 37.97i \\
|I_a| = 24.878 & |I_b| = 24.523 & |I_c| = 43.633 \\
\arg(I_a) = -26.739 \text{ deg} & \arg(I_b) = -92.778 \text{ deg} & \arg(I_c) = 119.516 \text{ deg} \\
\\ 
I_n := U_n \cdot Y_n & & \\
I_n = -0.467 + 2.283i & & \\
|I_n| = 2.33 & & \\
\arg(I_n) = 101.565 \text{ deg} & & 
\end{array}$$

### Пример расчета задачи 3.3.

Сопровитления фаз приемника  $\underline{Z}_{AB} = 8 + j4$  Ом,  $\underline{Z}_{BC} = 8 - j4$  Ом,  $\underline{Z}_{CA} = 5$  Ом подключены треугольником к трехфазному генератору, обмотки которого также соединены треугольником. Действующая величина симметричной трехфазной системы ЭДС 220 В. Сопровитлениями линейных проводов и

внутренним сопротивлениями источника ЭДС пренебречь. Определить фазные и линейные токи, активную, реактивную и полную мощности каждой фазы и всей цепи.

### Решение

Схема, соответствующая условию задачи, показана на рисунке 171.

Задаем исходные данные:

$$Z_{ab} := 8 + i \cdot 4 \quad Z_{bc} := 8 - i \cdot 4 \quad Z_{ca} := 5 \quad E := 220$$

Фазные напряжения приемника равны:

$$\begin{array}{lll} U_{ab} := i \cdot E & U_{bc} := E \cdot e^{-i \cdot 30 \cdot \text{deg}} & U_{ca} := E \cdot e^{-i \cdot 150 \cdot \text{deg}} \\ U_{ab} = 220i & U_{bc} = 190.526 - 110i & U_{ca} = -190.526 - 110i \end{array}$$

Фазные токи в приемнике:

$$\begin{array}{lll} I_{ab} := \frac{U_{ab}}{Z_{ab}} & I_{bc} := \frac{U_{bc}}{Z_{bc}} & I_{ca} := \frac{U_{ca}}{Z_{ca}} \\ I_{ab} = 11 + 22i & I_{bc} = 24.553 - 1.474i & I_{ca} = -38.105 - 22i \end{array}$$

Линейные токи:

$$\begin{array}{lll} I_a := I_{ab} - I_{ca} & I_b := I_{bc} - I_{ab} & I_c := I_{ca} - I_{bc} \\ I_a = 49.105 + 44i & I_b = 13.553 - 23.474i & I_c = -62.658 - 20.526i \end{array}$$

Мощности фаз:

$$\begin{array}{ll} S_{ab} := U_{ab} \cdot I_{ab} & S_{bc} := U_{bc} \cdot I_{bc} \\ S_{ab} = -4.84 \times 10^3 + 2.42i \times 10^3 & S_{bc} = 4.516 \times 10^3 - 2.982i \times 10^3 \\ S_{ca} := U_{ca} \cdot I_{ca} \\ S_{ca} = 4.84 \times 10^3 + 8.383i \times 10^3 \end{array}$$

Полная мощность системы активная:

$$\begin{array}{l} P := \text{Re}(S_{ab}) + \text{Re}(S_{bc}) + \text{Re}(S_{ca}) \\ P = 4.516 \times 10^3 \end{array}$$

Полная мощность системы реактивная:

$$Q := \text{Im}(S_{ab}) + \text{Im}(S_{bc}) + \text{Im}(S_{ca})$$

$$Q = 7.822 \times 10^3$$

## **4 Линейные цепи с периодическими несинусоидальными напряжениями и токами**

### **4.1 Общие теоретические сведения**

Периодическими несинусоидальными токами и напряжениями называют токи и напряжения, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону.

Они возникают при четырех различных режимах работы электрических цепей:

1. когда источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а все элементы цепи- активные сопротивления, индуктивности и емкости- линейны, т.е. от величины тока не зависят;
2. если источник ЭДС (источник тока) дает синусоидальную ЭДС (синусоидальный ток), но один или несколько элементов цепи нелинейны;
3. когда источник ЭДС (источник тока) дает несинусоидальную ЭДС (несинусоидальный ток), а в состав электрической цепи входят одно или несколько сопротивлений;
4. если источник ЭДС (источник тока) дает постоянную или синусоидальную ЭДС (синусоидальный ток), а один или несколько элементов цепи периодически изменяются во времени.

Из курса математики известно, что любую периодическую функцию  $f(x)$  с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющую условиям Дирихле, можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = A_0 + A_1^1 \sin x + A_2^1 \sin 2x + A_3^1 \sin 3x + \dots + A_k^1 \sin kx + \\ + B_1^{11} \cos x + B_2^{11} \cos 2x + B_3^{11} \cos 3x + \dots + B_k^{11} \cos kx$$

где  $A_0$  - постоянная составляющая;

$A_k^1$  - амплитуда синусной составляющей  $k$  гармоники;

$B_k^{11}$  - амплитуда косинусной составляющей.

Коэффициенты ряда Фурье определяются:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx ;$$

$$A_k^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx;$$

$$B_k^1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx;$$

Существуют несинусоидальные периодические кривые, обладающие специфическими свойствами:

- а) функции, симметричные относительно оси абсцисс, которые удовлетворяют условию  $f(x+\pi)=f(x)$ ;
- б) функции, симметричные относительно оси ординат, удовлетворяющие условию  $f(-x)=f(x)$ ;
- в) функции, симметричные относительно начала координат, удовлетворяющие условию  $-f(-x)=f(x)$ ;

Существует аналитический способ определения коэффициентов ряда Фурье и графо-аналитический.

Программа Mathcad значительно упрощает задачу

Определения коэффициентов Фурье и построения периодической несинусоидальной функции и гармонической функции ряда Фурье.

#### 4.1.1 Линейные электрические цепи при несинусоидальных периодических токах

Предыдущий материал посвящен анализу электрических цепей при синусоидальных токах и напряжениях. На практике ЭДС и токи в большей или меньшей степени являются несинусоидальными. Это связано с тем, что реальные генераторы не обеспечивают, строго говоря, синусоидальной формы кривых напряжения, а с другой стороны, наличие нелинейных элементов в цепи обуславливает искажение формы токов даже при синусоидальных ЭДС источников.

На практике к несинусоидальности напряжений и токов следует подходить двояко:

- в силовой электроэнергетике несинусоидальные токи обуславливают в общем случае дополнительные потери мощности, пульсации момента на валу двигателей, вызывают помехи в линиях связи; поэтому здесь необходимо «всеми силами» поддержание синусоидальных режимов;
- в цепях автоматики и связи, где несинусоидальные токи и напряжения лежат в основе принципа действия электротехнических устройств, задача наоборот заключается в их усилении и передаче с наименьшими искажениями.

В общем случае характер изменения величин может быть периодическим, почти периодическим и непериодическим. В данном разделе будут рассматриваться цепи только с периодическими переменными.



Периодическими несинусоидальными величинами называются переменные, изменяющиеся во времени по периодическому несинусоидальному закону. Причины возникновения несинусоидальных напряжений и токов могут быть обусловлены или несинусоидальностью источника питания или (и) наличием в цепи хотя бы одного нелинейного элемента. Кроме того, в основе появления несинусоидальных токов могут лежать элементы с периодически изменяющимися параметрами.

В качестве примера на рисунке 176,а представлена цепь с нелинейным резистором (НР), нелинейная вольт-амперная характеристика (ВАХ) которого обуславливает несинусоидальную форму тока  $i$  в цепи при синусоидальном напряжении  $u$  на ее входе (см. рисунок 176,б).

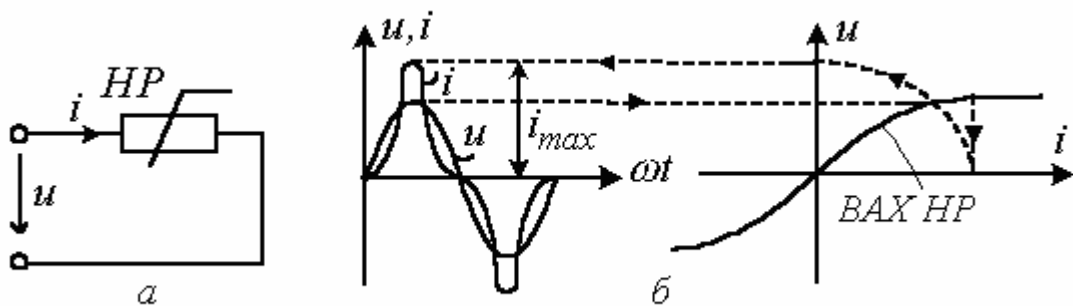


Рисунок 176 – Нелинейный элемент и вольт-амперные характеристики

### Характеристики несинусоидальных величин

Для характеристики несинусоидальных периодических переменных служат следующие величины и коэффициенты (приведены на примере периодического тока):

1. Максимальное значение -  $i_{max}$ .

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

2. Действующее значение -

$$I_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |i| dt$$

3. Среднее по модулю значение -

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i dt$$

4. Среднее за период значение (постоянная составляющая) -

5. Коэффициент амплитуды (отношение максимального значения к

$$\text{действующему) - } K_a = \frac{i_{max}}{I}$$

6. Коэффициент формы (отношение действующего значения к среднему

$$\text{по модулю) - } K_\Phi = \frac{I}{I_{cp}}$$

7. Коэффициент искажений (отношение действующего значения первой

$$\text{гармоники к действующему значению переменной) - } K_u = \frac{I_1}{I}$$

8. Коэффициент гармоник (отношение действующего значения высших гармонических к действующему значению первой гармоники) -

$$K_z = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} I_k^2}}{I_1}$$

### Разложение кривых в ряд Фурье

### периодических

### несинусоидальных

Из математики известно, что всякая периодическая функция  $f(t) = f(t + T)$ , где  $T$  – период, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в тригонометрический ряд. Можно отметить, что функции, рассматриваемые в электротехнике, этим условиям удовлетворяют, в связи с чем проверку на их выполнение проводить не нужно.

При разложении в ряд Фурье функция представляется следующим образом:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega t + \varphi_k) \quad (4.1)$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

Здесь  $A_0$  - постоянная составляющая или нулевая гармоника;  $c_1 \sin(\kappa \omega t + \varphi_1)$  - первая (основная) гармоника, изменяющаяся с угловой частотой  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T$  - период несинусоидальной периодической функции.

В выражении (4.1)  $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\operatorname{tg} \varphi_k = a_k / b_k$ , где коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  определяются по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \kappa \omega t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \kappa \omega t dt$$

### Свойства периодических кривых, обладающих симметрией

Коэффициенты ряда Фурье для стандартных функций могут быть взяты из справочной литературы или в общем случае рассчитаны по приведенным выше формулам. Однако в случае кривых, обладающих симметрией, задача существенно упрощается, поскольку из их разложения выпадают целые спектры гармоник. Знание свойств таких кривых позволяет существенно сэкономить время и ресурсы при вычислениях.

#### 1. Кривые, симметричные относительно оси абсцисс.

К данному типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(t + T/2)$  (см. пример на рисунке 177). В их разложении отсутствуют постоянная составляющая и четные гармоники, т.е.  $A_0 = c_2 = c_4 = c_6 \dots = 0$ .

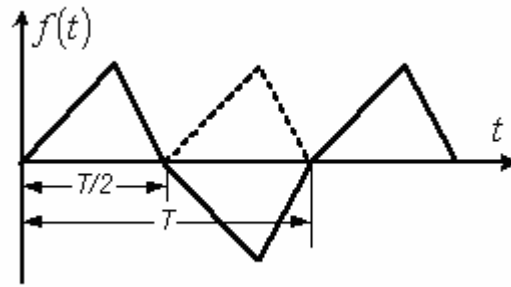


Рисунок 177 - Кривая, симметричные относительно оси абсцисс

## 2. Кривые, симметричные относительно оси ординат.

К данному типу относятся кривые, для которых выполняется равенство  $f(t) = f(-t)$  (см. пример на рисунке 178). В их разложении отсутствуют синусные составляющие, т.е.  $b_n = 0$ .

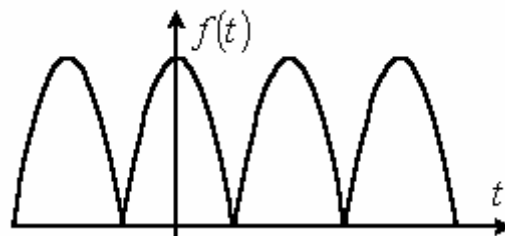


Рисунок – 178 - Кривая, симметричные относительно оси ординат

## 3. Кривые, симметричные относительно начала координат.

К этому типу относятся кривые, удовлетворяющие равенству  $f(t) = -f(-t)$  (см. пример на рисунке 179). При разложении таких кривых отсутствуют постоянная и косинусные составляющие, т.е.  $A_0 = a_n = 0$ .

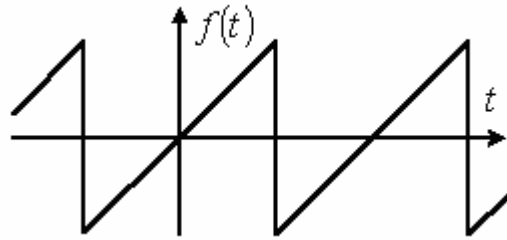


Рисунок 179 - Кривая, симметричные относительно начала координат

### Действующее значение периодической несинусоидальной переменной

Как было показано выше, действующим называется среднеквадратичное за период значение величины:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$$

При наличии аналитического выражения функции  $i(t)$  и возможности взятия интеграла от ее квадрата действующее значение  $i(t)$  определяется точно. Однако в общем случае на практике действующее значение переменной определяется на основе информации о действующих значениях конечного ряда гармонических.

Пусть 
$$i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k) \right]^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^T I_{km}^2 \sin^2(k\omega t + \varphi_k) dt + \\ &+ \frac{1}{T} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \int_0^T I_{pm} I_{qm} \sin(p\omega t + \varphi_p) \sin(q\omega t + \varphi_q) dt = I_0^2 + \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T I_{km}^2 (1 - \cos(2k\omega t + \\ &+ 2\varphi_k)) dt + \frac{1}{2T} \sum_{\substack{p=0 \\ q=0 \\ p \neq q}}^{\infty} \int_0^T I_{pm} I_{qm} [\cos((p-q)\omega t + \varphi_p - \varphi_q) - \cos((p+q)\omega t + \varphi_p + \varphi_q)] dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что каждый из интегралов от тригонометрических функций в последнем выражении равен нулю. Таким образом,

$$I^2 = I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}^2$$

или

$$I = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} I_k^2}.$$

Аналогичные выражения имеют место для ЭДС, напряжения и т.д.

### Мощность в цепях периодического несинусоидального тока

Пусть  $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k)$  и  $i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \beta_k)$ .

Тогда для активной мощности можно записать

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k) \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \beta_k) \right] dt.$$

Как было показано при выводе соотношения для действующего значения несинусоидальной переменной, среднее за период значение произведения синусоидальных функций различной частоты равно нулю. Следовательно,

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{U_{km} I_{km}}{2} \cos(\alpha_k - \beta_k) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \varphi_k,$$

где  $\varphi_k = \alpha_k - \beta_k$ .

Таким образом, активная мощность несинусоидального тока равна сумме активных мощностей отдельных гармонических:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} P_k.$$

Аналогично для реактивной мощности можно записать

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin \varphi_k$$

Полная мощность

$$S = UI = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} U_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2} = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2} \neq \sqrt{P^2 + Q^2},$$

где  $T$  – **мощность искажений**, определяемая произведениями действующих значений разномпорядковых гармонических тока и напряжения.

### Методика расчета линейных цепей при периодических несинусоидальных токах

Возможность разложения периодических несинусоидальных функций в ряд Фурье позволяет свести расчет линейной цепи при воздействии на нее несинусоидальных ЭДС (или токов) источников к расчету цепей с постоянными и синусоидальными токами в отдельности для каждой гармоники. Мгновенные значения искомых токов и напряжений определяются на основе принципа наложения путем суммирования найденных при расчете гармонических составляющих напряжений и токов. В соответствии с вышесказанным цепь на рисунке 180 при воздействии на нее ЭДС

$$e(t) = \sum_{k=0}^n E_{km} \sin(k\omega t + \varphi_n)$$

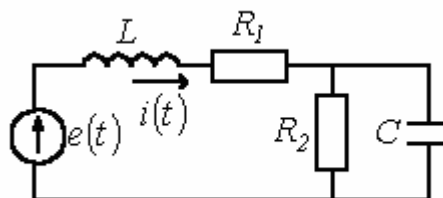


Рисунок 180 – Расчетная схема

(при расчете спектр рассматриваемых гармоник ограничивается) в расчетном плане представляется суммой цепей на рисунке 181.

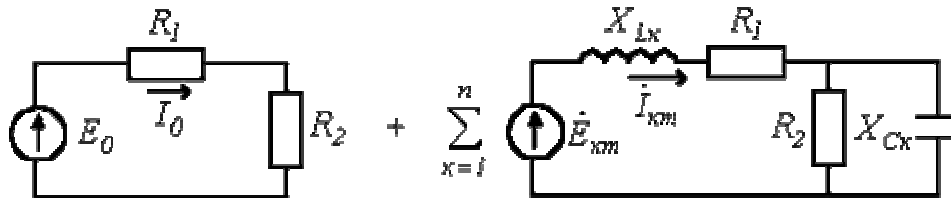


Рисунок 181 – Схемы к расчету методом наложения

Здесь  $\dot{E}_{km} = E_{km} e^{j\varphi_k}$ ;  $X_{Lk} = k\omega L$ ;  $X_{Ck} = 1/(k\omega C)$ .

Тогда, например, для тока в ветви с источником ЭДС, имеем

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{km} \sin(k\omega t + \alpha_k),$$

где каждая к-я гармоника тока рассчитывается символическим методом по своей к-й расчетной схеме.

При этом (поверхностный эффект не учитывается) для всех гармоник параметры  $R_1, R_2, L$  и  $C$  постоянны.

$$I_0 = \frac{E_0}{R_1 + R_2};$$

$$\dot{I}_{km} = \frac{\dot{E}_{km}}{R_1 + jX_{Lk} + \frac{R_2(-jX_{Ck})}{R_2 - jX_{Ck}}} = I_{km} e^{j\alpha_k}.$$

Необходимо помнить, что ввиду различия частот суммировать комплексы различных гармоник недопустимо.

Таким образом, методика расчета линейных цепей при несинусоидальных токах сводится к следующему:



1. ЭДС и токи источников раскладываются в ряды Фурье.
2. Осуществляется расчет цепи в отдельности для каждой гармонической.
3. Искомые величины определяются как алгебраические суммы соответствующих гармонических.

### **Контрольные вопросы**

1. Что является причиной появления несинусоидальных токов и напряжений в электрических цепях?
2. Какие величины и коэффициенты характеризуют периодические несинусоидальные переменные?
3. Какие гармонические отсутствуют в спектрах кривых, симметричных относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала системы координат?
4. Достаточно ли для определения величины полной мощности в цепи несинусоидального тока наличие информации об активной и реактивной мощностях?
5. Для каких цепей справедлива методика расчета цепей несинусоидального тока, основанная на разложении ЭДС и токов источников в ряды Фурье?

#### **4.1. 2 Резонансные явления в цепях несинусоидального тока**

В цепях несинусоидального тока резонансные режимы возможны для различных гармонических составляющих. Как и при синусоидальных токах, резонанс на  $k$ -й гармонике соответствует режиму работы, при котором  $k$ -е гармоники напряжения и тока на входе цепи совпадают по фазе, иначе говоря входное сопротивление (входная проводимость) цепи для  $k$ -й гармоники вещественно.

Пусть имеет место цепь на рисунке 182,а, питающаяся от источника несинусоидальной ЭДС, в которой емкость конденсатора может плавно изменяться от нуля до бесконечности.

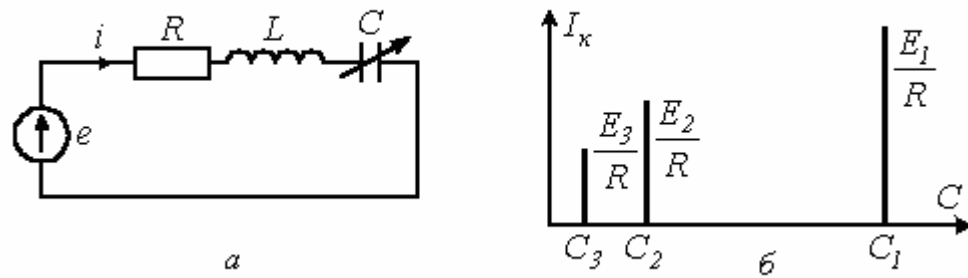


Рисунок 182 – Расчетная схема

Для к-й гармоники тока можно записать

$$I_k = \frac{E_k}{\sqrt{R^2 + \left( \kappa \omega L - \frac{1}{\kappa \omega C} \right)^2}},$$

где  $E_k$  - действующее значение к-й гармоники ЭДС.

Таким образом, при изменении  $C$  величина к-й гармоники тока будет изменяться от нуля при  $C=0$  до  $I_{\text{кв}} = E_k / \sqrt{R^2 + (\kappa \omega L)^2}$  при  $C = \infty$ , достигая максимума  $I_{\text{кmax}} = E_k / R$  при резонансе (см. рисунок 182,б), определяемом величиной емкости

$$C_k = \frac{1}{\kappa^2 \omega^2 L}.$$

Следует отметить, что, несмотря на то, что обычно с ростом порядка гармонической ЭДС ее амплитуда уменьшается, в режиме резонанса для к-й гармонической ее значение  $I_{\text{кmax}}$  может превышать величину первой гармоники тока.

Резонансные явления используются для выделения гармоник одних частот и подавления других. Пусть, например, в цепи на рисунке 183 необходимо усилить q-ю гармонику тока на нагрузке и подавить p-ю.

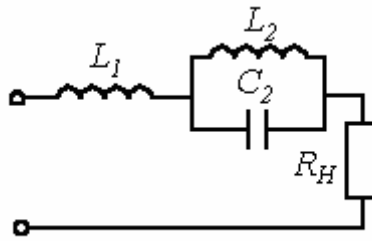


Рисунок 183 – Расчетная схема

Для подавления  $p$ -й гармоники в режим резонанса токов настраивается контур  $L_2 - C_2$ :

$$\frac{1}{p\omega L_2} = p\omega C_2$$

Для выделения  $q$ -й гармоники вся цепь для нее настраивается в режим резонанса напряжений:

$$jq\omega L_1 + \frac{jq\omega L_2 \left( -j \frac{1}{q\omega C_2} \right)}{j \left( q\omega L_2 - \frac{1}{q\omega C_2} \right)} = 0,$$

откуда при известных  $L_2$  и  $C_2$

$$L_1 = \frac{L_2}{q^2 \omega^2 L_2 C_2 - 1}.$$

Отметим, что рассмотренные явления лежат в основе работы L-C -фильтров.

# Особенности протекания несинусоидальных токов через пассивные элементы цепи

## 1. Резистор.

При  $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$  ток через резистор (см. рисунок 184)

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \sum I_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

где  $I_{km} = U_{km} / R$ .

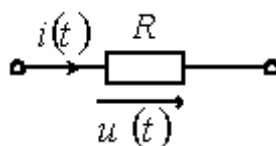


Рисунок 184 – Резистор

Таким образом, на резистивном элементе несинусоидальные напряжение и ток совпадают по форме и подобны друг другу. Это позволяет на практике осциллографировать форму тока с помощью регистрации напряжения на шунте.

## 2. Конденсатор.

Пусть напряжение на конденсаторе (рисунок 185) описывается

гармоническим рядом  $u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k)$ .

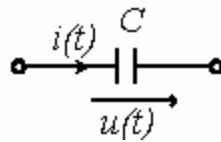


Рисунок 185 – Конденсатор

Коэффициент искажения кривой напряжения

$$K_{иU} = \frac{U_1}{\left( \sum_{k=1}^{\infty} U_k^2 \right)^{0,5}} \quad (4.2)$$

Ток через конденсатор

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} = C \sum_{k=0}^{\infty} U_{km} k \omega \cos(k \omega t + \varphi_k)$$

Тогда соответствующий кривой тока коэффициент искажения

$$K_{иI} = \frac{U_1}{\left( \sum_{k=1}^{\infty} (k U_k)^2 \right)^{0,5}} \quad (4.3)$$

Сравнение (4.2) и (4.3) показывает, что  $K_{иU} > K_{иI}$ , т.е. конденсатор искажает форму кривой тока по сравнению с напряжением, являясь сглаживающим элементом для последнего.

Отмеченное наглядно иллюстрирует рисунок 186, на котором форма кривой напряжения ближе к синусоиде, чем форма кривой тока.

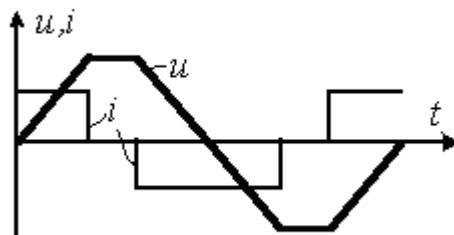


Рисунок 186 – Несинусоидальные напряжение и ток

### 3. Катушка индуктивности.

Принимая во внимание соотношение между напряжением и током для катушки индуктивности (рис. 6)

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

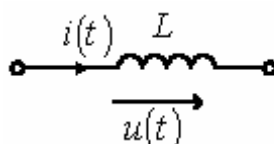


Рисунок 187 – Катушка индуктивности

совершенно аналогично можно показать, что в случае индуктивного элемента  $K_{иЛ} > K_{иУ}$ , т.е. кривая напряжения искажена больше, чем кривая тока. Этому случаю будет соответствовать рисунок 186 при взаимной замене на нем кривых напряжения и тока. Таким образом, катушка индуктивности является сглаживающим элементом для тока.

С учетом вышесказанного на практике, например в силовой полупроводниковой технике, для сглаживания выпрямленного напряжения применяют конденсаторные фильтры, а для тока – дроссели.

## Высшие гармоники в трехфазных цепях

Напряжения трехфазных источников энергии часто бывают существенно несинусоидальными (строго говоря, они несинусоидальны всегда). При этом напряжения на фазах В и С повторяют несинусоидальную кривую  $u_A = f(t)$  напряжения на фазе А со сдвигом на треть периода Т основной гармоники:

$$u_B = f(t - T/3); \quad u_C = f(t + T/3).$$

Пусть для фазы А к-я гармоника напряжения

$$u_{Ak} = U_{km} \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Тогда с учетом, что  $\omega T = 2\pi$ , для к-х гармонических напряжений фаз В и С соответственно можно записать:

$$u_{Bk} = U_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3}k\right);$$

$$u_{Ck} = U_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3}k\right).$$

Всю совокупность гармоник к от 0 до  $\infty$  можно распределить по трем группам:

1.  $k = 3n + 1$  ( $n = 0; 1; 2; \dots$ ) – гармоники данной группы образуют симметричные системы напряжений, последовательность которых соответствует последовательности фаз первой гармоники, т.е. они образуют симметричные системы напряжений прямой последовательности.

Действительно,

$$u_{Bk} = U_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3}(3n + 1)\right) = U_{km} \sin\left(k\omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3}\right)$$

и

$$u_{Ck} = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3}(3n+1)\right) = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3}\right).$$

2.  $\kappa = 3n+2$ . Для этих гармоник имеют место соотношения:

$$u_{Bk} = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3}(3n+2)\right) = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3}\right);$$

$$u_{Ck} = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3}(3n+2)\right) = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3}\right),$$

т.е. гармоники данной группы образуют симметричные системы напряжений обратной последовательности.

3.  $\kappa = 3n$ . Для этих гармоник справедливо

$$u_{Bk} = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k - \frac{2\pi}{3}3n\right) = U_{km} \sin(\kappa \omega t + \varphi_k);$$

$$u_{Ck} = U_{km} \sin\left(\kappa \omega t + \varphi_k + \frac{2\pi}{3}3n\right) = U_{km} \sin(\kappa \omega t + \varphi_k).$$

Таким образом, векторы напряжений данной группы во всех фазах в любой момент времени имеют одинаковые модули и направления, т.е. эти гармоники образуют системы нулевой последовательности.

Рассмотрим особенности работы трехфазных систем, обусловленные наличием гармоник, кратных трем.

1. Если фазы генератора соединены в треугольник, то при несинусоидальных фазных ЭДС сумма ЭДС, действующих в контуре (см. рисунок 188) не равна нулю, а определяется гармониками, кратными трем.

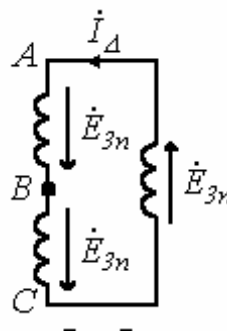


Рисунок 188 – Контур ЭДС



Эти гармоники вызывают в замкнутом треугольнике генератора ток, даже когда его внешняя цепь разомкнута:

$$I_{\Delta} = \sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots},$$

где  $\dot{I}_3 = \dot{E}_3 / \underline{Z}_3$ ;  $\dot{I}_6 = \dot{E}_6 / \underline{Z}_6$ ;  $\dot{I}_9 = \dot{E}_9 / \underline{Z}_9$ ; ..., а  $\underline{Z}_i$  - сопротивление фазы генератора для i-й гармоники, кратной трем.

2. Если фазы генератора соединить в открытый треугольник (см. рисунок 189), то на зажимах 1-2 будет иметь место напряжение, определяемое суммой ЭДС гармоник, кратных трем:

$$u_{12} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} E_{3k} \sin(3k\omega t + \varphi_{3k})$$

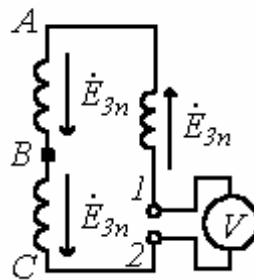


Рисунок 189 – Открытый треугольник

Таким образом, показание вольтметра в цепи на рисунке 189

$$U_V = 3\sqrt{E_3^2 + E_6^2 + E_9^2 + \dots}$$

3. Независимо от способа соединения – в звезду или в треугольник – линейные напряжения не содержат гармоник, кратных трем.

При соединении в звезду это объясняется тем, что гармоники, кратные трем, как указывалось, образуют нулевую последовательность, ввиду чего исчезают из линейных напряжений, равных разности фазных.

При соединении в треугольник составляющие фазных ЭДС, кратные трем, не выявляются в линейных (фазных) напряжениях, так как

компенсируются падениями напряжений на собственных сопротивлениях фаз генератора.

Таким образом, при соединении в треугольник напряжение генератора

$$U_{\phi} = U_{\Delta} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_4^2 + E_5^2 + E_7^2 + \dots}$$

и ток

$$I_{\Delta} = \sqrt{3(I_1^2 + I_2^2 + I_4^2 + I_5^2 + I_7^2 + \dots)} < \sqrt{3}I_{\phi} = \sqrt{3(I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots)}.$$

В свою очередь при соединении в звезду

$$U_{\Delta} = \sqrt{3(U_1^2 + U_2^2 + U_4^2 + U_5^2 + U_7^2 + \dots)} < \sqrt{3}U_{\phi} = \sqrt{3(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \dots)}.$$

4. При симметричной нагрузке ток в нейтральном проводе определяется гармоническими, кратными трем, поскольку они образуют нулевую последовательность:

$$I_N = 3\sqrt{I_3^2 + I_6^2 + I_9^2 + \dots}.$$

5. При соединении в звезду и отсутствии нейтрального провода фазные токи нагрузки не содержат гармоник, кратных трем (в соответствии с первым законом Кирхгофа сумма токов равна нулю, что невозможно при наличии этих гармоник). Соответственно нет этих гармоник и в фазных напряжениях нагрузки, связанных с токами законом Ома. Таким образом, при наличии гармоник, кратных трем, в фазных напряжениях генератора напряжение смещения нейтрали в симметричном режиме определяется этими гармониками

$$U_{N'N} = \sqrt{U_3^2 + U_6^2 + U_9^2 + \dots}.$$

## Контрольные вопросы

1. Какой характер: монотонный или колебательный – будет иметь зависимость действующего значения тока от величины индуктивности в цепи на рис. 1 при ее изменении от нуля до бесконечности?
2. Почему на практике сигнал, пропорциональный току, получают с использованием резистивных шунтов?

3. Какие гармоники и почему определяют характерные особенности режимов работы трехфазных цепей?
4. Какие гармоники отсутствуют в линейных напряжениях и токах?
5. Почему при несинусоидальных источниках питания, соединенных в треугольник, действующее значение фазной ЭДС может быть больше действующего значения фазного напряжения?

## 4.2 Решение типовых задач

### Задача 4.1

Для примера рассмотрим, как рассчитываются токи, мощности, коэффициент мощности и напряжения на отдельных участках цепи, представленной на рисунке 190, к зажимам которой приложено напряжение:

$$u = 106 \sin(\omega t + 30^\circ) + 35,5 \cos(3\omega t - 20^\circ) \text{ В};$$

$$R_1=10 \text{ Ом}; R_2=20 \text{ Ом}; R_3=15 \text{ Ом}; \omega L = 50 \text{ Ом}; \frac{1}{\omega C} = 30 \text{ Ом}.$$

### Решение

Расчет такой цепи ведется для каждой гармоники в отдельности. При этом  $X_L$  растет, а  $X_C$  падает пропорционально номеру гармоники.

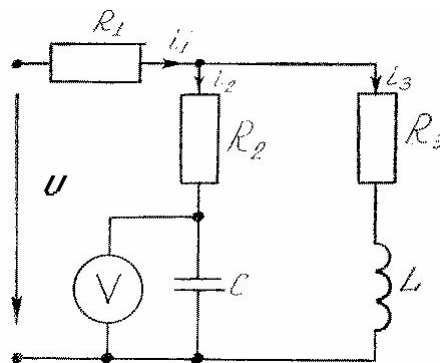


Рисунок 190 – Расчетная схема

1. Первая гармоника:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_1 &= R_1 + \frac{(R_2 + \frac{1}{j\omega C})(R_3 + j\omega L)}{R_2 + R_3 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = 10 + \frac{(20 - j30)(15 + j5)}{35 - j25} = \\
&= 10 + \frac{36.1e^{-j56^\circ 20'} \cdot 15.8e^{j18^\circ 25'}}{43e^{-j35^\circ 30'}} = 10 + 13.25e^{-j2^\circ 25'} = \\
10 + 13.25 - j0.56 &= 23.25 - j0.56 = 23.25e^{-j1^\circ 20'} \text{ Ом.} \\
\dot{I}_{11m} \frac{\dot{U}_{1m}}{\underline{Z}_1} &= \frac{106e^{j30^\circ}}{23.25e^{j1^\circ 20'}} = 4.56e^{j31^\circ 20'} \text{ А.} \\
\dot{I}_{21m} = \dot{I}_{11m} \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} &= \frac{4.56e^{j31^\circ 20'} \cdot 15.8e^{j18^\circ 25'}}{43e^{-j35^\circ 30'}} = 1.68e^{j85^\circ 15'} \text{ А.} \\
\dot{I}_{31m} = \dot{I}_{11m} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} &= \frac{4.56e^{j31^\circ 20'} \cdot 36.1e^{-j56^\circ 20'}}{43e^{-j35^\circ 30'}} = 1.68e^{j85^\circ 15'} \text{ А.} \\
\underline{S}_1 = \dot{U}_1 \dot{I}_{11} &= \frac{106e^{j30^\circ}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4.56e^{-j31^\circ 20'}}{\sqrt{2}} = 242e^{-j1^\circ 20'} = 242 - j6 \text{ В} \cdot \text{А.} \\
P_1 &= 242 \text{ Вт; } Q_1 = -6 \text{ Вар.} \\
\dot{U}_{C1} = \dot{I}_2 \left( -j \frac{1}{\omega C} \right) &= \frac{1.68e^{j85^\circ 15'}}{\sqrt{2}} \cdot 30e^{-j90^\circ} = 35.6e^{-j4^\circ 45'} \text{ В.}
\end{aligned}$$

2. Третья гармоника:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_3 &= R_1 + \frac{\left( R_2 - j \frac{1}{3\omega C} \right) (R_3 + j3\omega L)}{R_2 + R_3 + j \left( 3\omega L - \frac{1}{3\omega C} \right)} = \\
&= 10 + \frac{(20 - j10)(15 + j15)}{35 + j5} = 10 + \frac{22.4e^{-j26^\circ 30'} \cdot 21.2e^{j45^\circ}}{35.3e^{j8^\circ}} = \\
&= 10 + 13.4e^{j10^\circ 30'} = 10 + 13.2 + j2.45 = 23.2 + j42.5 = 23.4e^{j6^\circ} \text{ Ом.} \\
\dot{I}_{13m} = \frac{\dot{U}_{3m}}{\underline{Z}_3} &= \frac{35.5e^{j70^\circ}}{23.4e^{j6^\circ}} = 1.515e^{j64^\circ} \text{ А;} \\
\dot{I}_{23m} = \frac{\dot{I}_{13m} \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} &= \frac{1.515e^{j64^\circ} \cdot 21.2e^{j45^\circ}}{35.3e^{j8^\circ}} = 0.91e^{j101^\circ} \text{ А.} \\
\dot{I}_{33m} = \dot{I}_{13m} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} &= \frac{1.515e^{j64^\circ} \cdot 22.4e^{-j26^\circ 30'}}{35.3e^{j8^\circ}} = 0.964e^{j29^\circ 30'} \text{ А.} \\
\underline{S}_3 = \dot{U}_3 \dot{I}_3 &= \frac{35.5e^{j70^\circ}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1.515e^{-j64^\circ}}{\sqrt{2}} = 26.9e^{j6^\circ} = 26.4 + j3.1 \text{ В} \cdot \text{А.} \\
P_3 &= 26.4 \text{ Вт; } Q^3 = 3.1 \text{ Вар.} \\
\dot{U}_{C3} = \dot{I}_{23} \left( -j \frac{1}{3\omega C} \right) &= \frac{0.91e^{j101^\circ}}{\sqrt{2}} \cdot 10e^{-j90^\circ} = 6.7e^{j11^\circ} \text{ В.}
\end{aligned}$$

Мгновенные значения токов:

$$\begin{aligned}i_1 &= 4,56 \sin(\omega t + 31^\circ 20') + 1,515 \sin(3\omega t + 64^\circ) \text{ A}; \\i_2 &= 1,68 \sin(\omega t + 85^\circ 15') + 0,91 \sin(3\omega t + 101^\circ) \text{ A}; \\i_3 &= 3,84 \sin(\omega t + 10^\circ 30') + 0,964 \sin(3\omega t + 29^\circ 30') \text{ A};\end{aligned}$$

Действующие значения токов:

$$\begin{aligned}I_1 &= \sqrt{\frac{I_{1m}^2 + I_{3m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{4,56^2 + 1,515^2}{2}} = 3,4 \text{ A.} \\I_2 &= \sqrt{\frac{I_{21m}^2 + I_{23m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1,68^2 + 0,91^2}{2}} = 1,35 \text{ A.} \\I_3 &= \sqrt{\frac{I_{31m}^2 + I_{33m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{3,84^2 + 0,964^2}{2}} = 2,8 \text{ A.}\end{aligned}$$

Действующее значение приложенного напряжения:

$$U = \sqrt{\frac{U_{1m}^2 + U_{3m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{106^2 + 35,5^2}{2}} = 79 \text{ В.}$$

Мощности:

- а) Активная:  $P = P_0 + P_1 + P_3 = 242 + 26,4 = 268,4 \text{ Вт.}$
- б) Реактивная:  $Q = Q_1 + Q_3 = -6 + 3,1 = -2,9 \text{ ВАр.}$
- в) Полная:  $S = UI_1 = 79 \cdot 3,4 = 268,6 \text{ ВА.}$

Коэффициент мощности:

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{268,4}{268,6} \approx 1,0$$

Показания вольтметра:

$$U_c = \sqrt{\frac{U_{C1m}^2 + U_{C3m}^2}{2}} = \sqrt{\frac{35,6^2 + 6,7^2}{2}} = 25,6 \text{ В.}$$

Из приведенного примера видны следующие особенности несинусоидальных величин в электрических цепях:

1. Активная мощность равна арифметической сумме активных мощностей гармоник.

2. Реактивная мощность определяется как алгебраическая сумма реактивных мощностей гармоник. При этом, как и в синусоидальном токе, принято считать  $Q_L > 0$  и  $Q_C < 0$ .

3. Полная мощность подсчитывается только как произведение действующих значений напряжения и тока. Запомните, что в несинусоидальной цепи:

$$S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

4. Коэффициент мощности несинусоидальной цепи — это  $\cos \varphi$  такой синусоидальной цепи, у которой действующие значения напряжения и тока такие же, как в рассматриваемой цепи, и в которой выделяется та же мощность.

В общем случае несинусоидальные кривые напряжения и тока имеют разную форму. Это различие характеризуется коэффициентом искажения  $k_u$ , равным отношению действующего значения первой гармоники к действующему значению всей кривой. При  $k_u = 0,955$  кривая считается практически синусоидальной.

Обратите внимание на то, что при увеличении номера гармоники степень искажения кривой тока в индуктивности по сравнению с кривой напряжения на ее зажимах уменьшается, а степень искажения кривой тока в емкости — увеличивается. То есть, в несинусоидальных цепях индуктивность сглаживает, а емкость искажает кривую тока.

#### Задача 4.2

Разложить в тригонометрический ряд графоаналитическим методом периодический ток, который получается в цепи на рисунке 191 в результате однополупериодного выпрямления. Амплитуда тока  $I_m = 10$  А. нагрузка — активная.

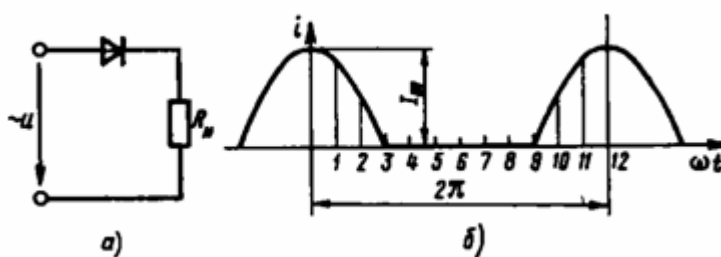


Рисунок 191 – Схема цепи и график несинусоидального тока

#### Решение

Построим графики выпрямленного тока, разделим на 12 частей с интервалом по оси абсцисс в  $30^\circ$  и проведем ординаты. Для определения постоянной составляющей  $I_0$  и коэффициентов  $B_1$  и  $C_1$  составим таблицу 2.

Ординаты найдены измерением по графику и занесены в таблицу 2. Все ординаты с 3-й по 9-ю равны нулю. Другие графы таблицы заполняются по результатам расчетов при  $k=1$ , так как определяются коэффициенты основной (первой) гармоники.

Таблица 2 – Расчет коэффициентов Фурье постоянной составляющей и основной гармоники

Номер ординаты	$i$ , А	$\omega t$ , град	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$i \sin \omega t$	$i \cos \omega t$
1	8,6	30	0,5	0,86	4,3	7,4
2	5	60	0,86	0,5	4,3	2,5
3	0	90	1	0	0	0
4-9	0	120-270	-	-	0	0
10	5	300	-0,86	0,5	-4,3	2,5
11	8,6	330	-0,5	0,86	-4,3	7,4
12	10	360	0	1	0	10
Сумма	37,2				0	29,8

Постоянная составляющая выпрямленного тока:

$$I_0 = \frac{\sum_1^m i}{m} = \frac{\sum_1^{12} 37,2}{12} = \frac{37,2}{12} = 3,1 \text{ А.}$$

Определим коэффициенты  $B_1$  и  $C_1$ :

$$B_1 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \sin k\omega t = 0$$

$$C_1 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \cos k\omega t = \frac{2}{12} \cdot 29,8 = 4,96.$$

Для определения коэффициента  $C_2$  составим таблицу 3.

Таблица 3 – Расчет коэффициентов Фурье второй гармоники

Номер ординаты	$i$ , А	$\omega t$ , град	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$i \sin \omega t$	$i \cos \omega t$
1	8,6	60	0,86	0,5	7,4	4,3
2	5	120	0,86	-0,5	4,3	-2,5
3	0	180	0	-1	0	0
4-9	0	-	-	-	0	0
10	5	600	-0,86	-0,5	-4,3	-2,5
11	8,6	660	-0,86	0,5	-7,4	4,3
12	10	720	0	1	0	10
Сумма	37,2				0	13,6

$$C_2 = \frac{2}{m} \sum_1^m i \cos k\omega t = \frac{2}{12} \cdot 13,6 = 2,26.$$

Для определения коэффициента  $C_3$  составим таблицу 4.

Таблица 4 – Расчет коэффициентов Фурье третьей гармоники

Номер ординаты	$i, A$	$\omega t, \text{град}$	$\sin \omega t$	$\cos \omega t$	$i \sin \omega t$	$i \cos \omega t$
1	8,6	90	1	0	8,6	0
2	5	180	0	-1	0	-5
3	0	-	-	-	0	0
4-9	0	-	-	-	0	0
10	5	900	0	-1	0	-5
11	8,6	990	-1	0	-8,6	0
12	10	1080	0	1	0	10
Сумма	37,2	-			0	0

$$C_3 = 0; \quad B_3 = 0.$$

Таким образом, третья гармоника в составе ряда отсутствует.

В таком же порядке определены следующие коэффициенты:  $C_4 = -0,6$ ;  $C_5 = 0$ ;  $C_6 = 0,46$ .

В составе ряда отсутствуют не только синусы, но и нечетные гармоники, кроме первой, а знаки высших гармоник чередуются.

Ряд заданной функции имеет вид:

$$i = 3,1 + 4,96 \cos \omega t + 2,26 \cos 2\omega t - 0,6 \cos 4\omega t + 0,46 \cos 6\omega t - \dots + \dots$$

### Задача 4.3

Катушка с активным сопротивлением  $R=18$  Ом и индуктивностью  $L=0,0383$  Гн соединена последовательно с конденсатором  $C=88,5$  мкФ (рисунок 192).

На зажимах цепи действует напряжение  $u=200+300\sin 314t+150\sin 3 \cdot 314t$ .

Найти выражение мгновенных значений и действующие значения тока, напряжений на катушке и конденсаторе. Определить активную мощность в цепи.



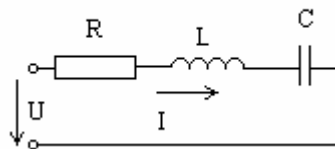


Рисунок 192 – Расчетная схема

### Решение

Сопротивление цепи для постоянной составляющей равно бесконечности, так как в цепи имеется конденсатор. Постоянная составляющая тока равна нулю:  $I_0 = 0$ .

Сопротивление цепи для первой гармоники:

$$\begin{aligned}
 R &= 18 \text{ Ом}; \\
 X_{1L} &= \omega_1 L = 314 \cdot 0,0383 = 12 \text{ Ом}; \\
 X_{1C} &= \frac{1}{\omega_1 C} = \frac{10^6}{314 \cdot 88,5} = 36 \text{ Ом}; \\
 Z_1 &= \sqrt{R^2 + (X_{1L} - X_{1C})^2} = \sqrt{18^2 + (12 - 36)^2} = 30 \text{ Ом}.
 \end{aligned}$$

Реактивное сопротивление току первой гармоники имеет емкостной характер:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R}{Z_1} = \frac{18}{30} = 0,6; \quad \varphi_1 = 53^\circ.$$

Амплитуда тока первой гармоники:

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{Z_1} = \frac{300}{30} = 10 \text{ А}.$$

Сопротивление цепи для третьей гармоники:

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + (X_{3L} - X_{3C})^2} = \sqrt{R^2 + (X_{1L} \cdot 3 - \frac{X_{1C}}{3})^2} = \sqrt{18^2 + (12 \cdot 3 - \frac{36}{3})^2} = 30 \text{ Ом}.$$

Реактивное сопротивление току третьей гармоники имеет емкостной характер:

$$\cos \varphi_3 = \frac{R}{Z_3} = \frac{18}{30} = 0,6; \quad \varphi_3 = 53^\circ.$$

Амплитуда тока третьей гармоники:

$$I_{3m} = \frac{U_{3m}}{Z_3} = \frac{15}{30} = 5 \text{ А.}$$

Действующие значения токов первой и третьей гармоник:

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{1,41} = 7,1 \text{ А}; \quad I_3 = \frac{I_{3m}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{1,41} = 3,55 \text{ А};$$

Действующие значения общего тока:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2 + \dots} = \sqrt{0 + 7,1^2 + 3,55^2} = 7,95 \text{ А.}$$

Уравнение общего тока:

$$i = 10 \sin(314t + 53^\circ) + 5 \sin(3 \cdot 314t - 53^\circ)$$

Для определения напряжения на катушке найдем сопротивления катушки токам первой и третьей гармоник:

$$Z_{1к} = \sqrt{R^2 + X_{1L}^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 21,6 \text{ Ом.}$$

$$Z_{3к} = \sqrt{R^2 + X_{3L}^2} = \sqrt{18^2 + (12 \cdot 3)^2} = 40,3 \text{ Ом.}$$

$$\cos \varphi_{1к} = \frac{R}{Z_{1к}} = \frac{18}{21,6} = 0,834; \quad \varphi_{1к} = 34^\circ.$$

$$\cos \varphi_{3к} = \frac{R}{Z_{3к}} = \frac{18}{40,3} = 0,447; \quad \varphi_{3к} = 63^\circ.$$

Амплитуды первой и третьей гармоник напряжения на катушке:

$$U_{1mk} = I_{1mk} Z_{1к} = 10 \cdot 21,6 = 216 \text{ В};$$

$$U_{3mk} = I_{3mk} Z_{3к} = 5 \cdot 40,3 = 201,5 \text{ В.}$$

Уравнение напряжения на катушке:

$$u_k = 216 \sin(314t + 53^\circ + 34^\circ) + 201,5 \sin(3 \cdot 314t - 53^\circ + 63^\circ);$$

$$u_k = 216 \sin(314t + 87^\circ) + 201,5 \sin(3 \cdot 314t + 10^\circ).$$

Напряжение на конденсаторе состоит из постоянной составляющей, первой и третьей гармоник. Постоянная составляющая напряжения на

конденсаторе равна постоянной составляющей напряжения сети, как напряжение между точками разрыва цепи:

$$U_{0C} = U_0 = 200 \text{ В.}$$

Первая гармоника:

$$U_{1mC} = I_{1m} Z_{1C} = 10 \cdot 36 = 360 \text{ В.}$$

Третья гармоника:

$$U_{3mC} = I_{3m} Z_{3C} = 5 \cdot \frac{36}{3} = 60 \text{ В.}$$

Уравнение напряжения на конденсаторе:

$$u_C = 200 + 360 \sin(314t + 53^\circ - 90^\circ) + 60 \sin(3 \cdot 314t - 53^\circ - 90^\circ);$$

$$u_C = 200 + 360 \sin(314t - 37^\circ) + 60 \sin(3 \cdot 314t - 143^\circ).$$

Действующее напряжение на катушке и конденсаторе:

$$U_k = \sqrt{\left(\frac{U_{1mk}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{3mk}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{216}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{201,5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 210 \text{ В;}$$

$$U_C = \sqrt{U_{0C}^2 + U_{1C}^2 + U_{3C}^2} = \sqrt{200^2 + \left(\frac{360}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{2}}\right)^2} = 326 \text{ В.}$$

Активная мощность в цепи:

$$P = P_0 + P_1 + P_3;$$

$$P_0 = U_0 I_0 = 200 \cdot 0 = 0;$$

$$P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_1 = \frac{300}{\sqrt{2}} \cdot \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot 0,6 = \frac{3000}{2} 0,6 = 900 \text{ Вт;}$$

$$P_3 = U_3 I_3 \cos \varphi_3 = \frac{150}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot 0,6 = \frac{750}{2} 0,6 = 225 \text{ Вт;}$$

$$P = 900 + 225 = 1125 \text{ Вт.}$$

### 4.3 Применение пакета Mathcad к расчету цепи с периодическими несинусоидальными напряжениями и токами

**Задача 4.1.** Заданное пилообразное напряжение  $f(t) = \frac{2At}{T}$  должно быть подвергнуто Фурье-анализу. Определить при помощи численного интегрирования коэффициенты Фурье для первых 10-ти членов. Построить графики спектра-Фурье и аппроксимации пилообразного напряжения при помощи 10-ти первых членов разложения в ряд Фурье.

#### Решение

Исходные данные для решения задачи:

$$\omega := 1 \quad f(t) := \frac{A \cdot 2 \cdot t}{T} \quad T := 2 \cdot \frac{\pi}{\omega} \quad A := \pi \quad n := 1..5$$

Определение коэффициентов Фурье:

$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} A \cdot 2 \cdot \frac{t}{T} dt$$

$$a_0 = 0.00$$

$$a_n := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} A \cdot 2 \cdot \frac{t}{T} \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

$$a_n := \text{if}(|a_n| < \text{TOL}, 0, a_n)$$

$$b_n := \frac{2}{T} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} A \cdot 2 \cdot \frac{t}{T} \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t) dt$$

$$b_n := \text{if}(|b_n| < \text{TOL}, 0, b_n)$$

Результаты вычислений и спектр Фурье пилообразного напряжения:

$a_n =$	$b_n =$
0.00	2.00
0.00	-1.00
0.00	0.67
0.00	-0.50
0.00	0.40

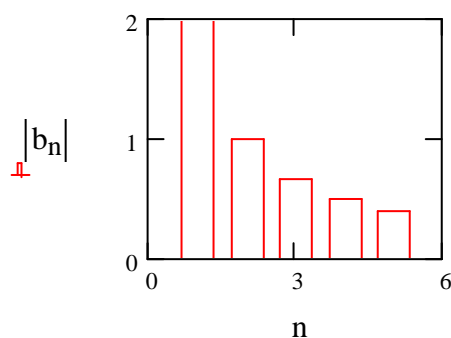


Рисунок 192 – Спектр Фурье пилообразного напряжения

Графики исходного пилообразного напряжения и гармонические составляющие первого и высшего порядков:

$$t := -6, -5.98.. 6$$

$$g(t) := t - 2 \cdot \pi - T \cdot \text{floor}\left[\frac{(t - \pi)}{T}\right]$$

$$f(t) := \sum_n b_n \cdot \sin(n \cdot \omega \cdot t)$$

Исходное пилообразное напряжение:

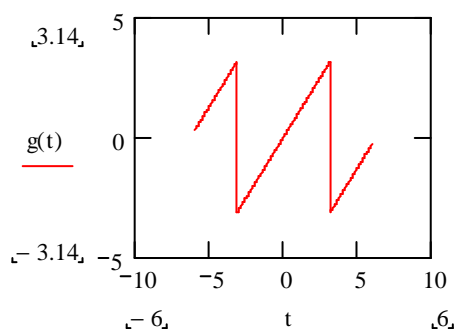


Рисунок 193 – График исходного пилообразного напряжения

Разложение в ряд Фурье с пятью гармониками:

$$f1(t) := b_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$f2(t) := b_2 \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t)$$

$$f3(t) := b_3 \cdot \sin(3 \cdot \omega \cdot t)$$

$$f4(t) := b_4 \cdot \sin(4 \cdot \omega \cdot t)$$

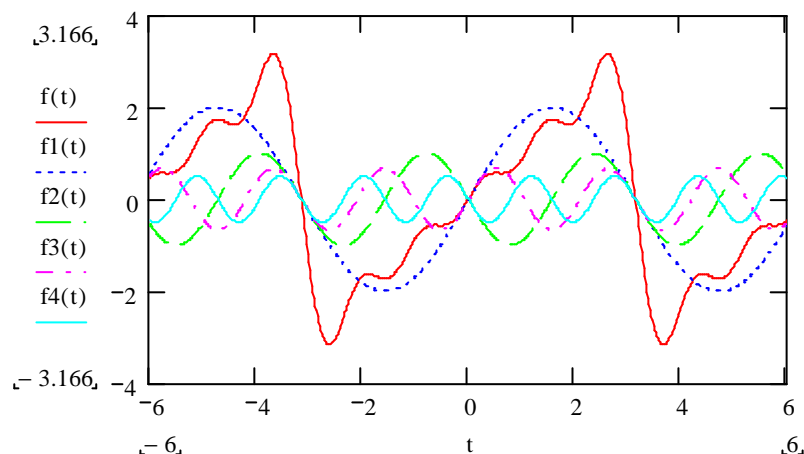


Рисунок 194 – Гармонические составляющие пилообразного напряжения

#### Задача 4.2.

К цепи, состоящей из последовательно включенных резистора  $R=8$  Ом, индуктивности  $L=19.1$  мГн и конденсатора  $C=265$  мкФ, приложено напряжение, описываемое уравнением  $U = 169 \sin \omega t + 45.4 \sin 3\omega t$  В,  $f=50$  Гц – частота первой гармоники. Определить действующее значение несинусоидального тока и напряжения в цепи, полную мощность.

#### Решение

Расчет произведем для каждой составляющей несинусоидального напряжения отдельно. Для этого удобнее использовать циклическое программирование, так как порядок расчета для каждой составляющей одинаков. Если результат вычислений программы разнородные единицы (сопротивление, ток, напряжение и т.д.), то единицы измерения не вводятся.

Исходные данные для решения задачи:

$$\begin{array}{llll}
 R := 8 & L := 19.1 \cdot 10^{-3} & C := 265 \cdot 10^{-6} & f := 50 \\
 U_2 := 0 & U_1 := 169 & U_3 := 45.4 & n := 1..3
 \end{array}$$

Вводим программу для расчета действующих значений тока первой и третьей гармоник:

$$I(n) := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in n \\ \quad XL \leftarrow 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot i \\ \quad Xc \leftarrow \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot i} \\ \quad Z \leftarrow \sqrt{R^2 + (XL - Xc)^2} \text{ if } i \neq 2 \\ \quad 0 \text{ otherwise} \\ \quad U \leftarrow \frac{U_i}{\sqrt{2}} \\ \quad I \leftarrow \frac{U}{Z} \end{array} \right.$$

$I(n) =$
11.942
0
1.991

В таблице результатов  $I_1=11.942$  A;  $I_2=0$ ;  $I_3=1.991$  A.

Вводим программу для определения действующих значений напряжения первой и третьей гармоник:

$$U(n) := \left| \begin{array}{l} u \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in n \\ \quad U \leftarrow \frac{U_i}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

$U(n) =$
119.501
0
32.103

В таблице результатов  $U_1=119.501$  В;  $U_2=0$ ;  $U_3=32.103$  В.

Вводим программу для определения действующего значения несинусоидального тока и напряжения и полной мощности для всей цепи:

$$S(n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 1 \\ \quad I \leftarrow \sqrt{I(n)^2 + I(n+2)^2} \\ \quad U \leftarrow \sqrt{U(n)^2 + U(n+2)^2} \\ \quad s^{(n)} \leftarrow \begin{pmatrix} I \\ U \\ U \cdot I \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \text{res} := S(1)$$

$$A := \text{res}^{(1)} \quad A = \begin{pmatrix} 12.107 \\ 123.738 \\ 1.498 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

Результаты в матрице располагаются в том же порядке, что и в программе I=12.107 A; U=123.738 В; S=1498 ВА.

Расчет выполнен.

Данную задачу можно решить, не применяя панель программирования. Исходные данные для решения задачи:

$$\begin{array}{llll} R := 8 & L := 19.1 \cdot 10^{-3} & C := 265 \cdot 10^{-6} & f := 50 \\ U_2 := 0 & U_1 := 169 & U_3 := 45.4 & n := 1..3 \end{array}$$

Определяем действующие значения напряжений первой и третьей гармоник:

$$u_n := \frac{U_n}{\sqrt{2}}$$

$u_n =$
119.501
0
32.103

Рассчитываем реактивные и полные сопротивления цепи первой и третьей гармоникам:

$$XL_n := 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \cdot n \quad Xc_n := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C \cdot n}$$



$$XL_n =$$

6
12.001
18.001

$$Xc_n =$$

12.012
6.006
4.004

$$Z_n := \sqrt{R^2 + (XL_n - Xc_n)^2}$$

$$Z_n =$$

10.007
9.997
16.122

Определяем действующие значения токов первой и третьей гармоник:

$$I_n := \frac{u_n}{Z_n}$$

$$I_n =$$

11.942
0
1.991

Определяем действующее значение несинусоидального тока, напряжения и полную мощность:

$$I := \sqrt{(I_1)^2 + (I_3)^2}$$

$$I = 12.107$$

$$u := \sqrt{(u_1)^2 + (u_3)^2}$$

$$u = 123.738$$

$$S := u \cdot I$$

$$S = 1.498 \times 10^3$$

Результаты расчета совпадают с предыдущим.

## **Заключение**

Отрасль науки и техники, определяемая термином «электротехника», связана с применением электрических и магнитных явлений для практических целей. Эта отрасль охватывает очень широкий круг вопросов и задач, из числа которых можно выделить теоретические и прикладные, четкую границу между ними провести непросто.

Учебный курс «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ) входит в учебные планы большой группы электроэнергетических и других технических специальностей. При подготовке бакалавров электроэнергетики изучением курса ТОЭ создается теоретическая база для изучения последующих прикладных учебных курсов, которые вместе составляют содержание специальности.

Закончив изучение курса ТОЭ, можно приступить к изучению прикладных курсов по специальности. Но, как показывает опыт, курс ТОЭ еще долго остается настольной книгой студентов, а затем и специалистов. Изучение электротехники, как и многих других технических наук, дается нелегко. Для упрощения расчетов в учебном пособии рассмотрены примеры использования программы MathCAD.

### Список использованных источников

- 1 Васильева Г.С. Биология трансплантированных опухолей.- Алматы: Наука, 2003.- 216 с.
- 1 Попов В. С. Теоретическая электротехника.— М.: Энергоатомиздат, 1990. 544 с.
- 2 Нейман Р. Л., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники М.—Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд., 1981.—416 с.
- 3 Зевеке Г. В., Ионкин П. А. и др. Основы теории цепей. — М.: Энергия. 1975.—752 с.
- 4 Зернов Н.В. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей. Л.: Энергия, 1972.—816 с.
- 5 Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. — М.: Высшая школа, 2001. —750 с.
- 6 Каплянский А. Е. и др. Теоретические основы электротехники. М , Высшая школа, 1972.—448 с.
- 7 Толстов Ю. Г., Теврюков А. А. Теория электрических цепей. М Высшая школа, 1971. — 295 с.
- 8 Яворский Б. М., Пинский А. А. Основы физики. Т. 2. — М.: Науки, 1972.—730 с.
- 9 Константинов В. И. и др. Сборник задач по теоретической электротехнике. — М.: Энергия, 1971. — 240 с.
- 10 Зайчик М. Ю. Сборник задач и упражнений по теоретической электротехнике. — М.: Энергия, 1978. —176 с.
- 11 Херхагер М., Партолль Х.. Mathcad 2000 BNV, Киев, 2000.— 415 с.
- 12 Крянов Д.В. Самоучитель MATHCAD., Санкт-Петербург: «БХВ-Петербург» 2003. – 125 с.